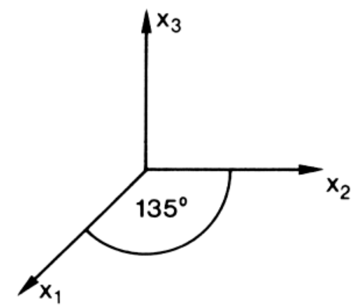
Übungsaufgabe

Gegeben sind die Punkte $A(9|0|0)$, $B(0|4{,}5|0)$ und $C(0|0|4{,}5)$ sowie die Gerade

$$g: \vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R}.$$

a) Die Punkte A, B und C liegen in der Ebene E. Stelle eine Koordinatengleichung dieser Ebene auf. Die Gerade g schneidet die Ebene E im Punkt D. Bestimme die Koordinaten von D. Zeichne das Dreieck ABC und den Punkt D in ein Achsenkreuz ein. (LE 1 cm; Verkürzungsfaktor in $x_1$-Richtung $\frac{1}{2}\sqrt{2}$)
Zeichne die Normale zur Ebene E durch den Punkt D ein.




b) Für jedes $k \in \mathbb{R}$ ist eine Ebene $E_k: kx_1 + 2kx_2 + 6x_3 - 9k = 0$ gegeben.
Für welchen Wert von k ist $E_k$ eine der Koordinatenebenen?
Für welchen Wert von k ist $E_k$ parallel zu g?

## Lösungshinweise:

a) Da drei Punkte gegeben sind, kann man zunächst eine Parametergleichung der Ebene E aufstellen und dann durch Elimination der Parameter eine Koordinatengleichung von E ermitteln. Die Koordinatengleichung erhält man aber schneller, wenn man die besondere Lage der Punkte A, B und C ausnutzt und die sogenannte Achsenabschnittsform einer Ebene verwendet. Aus dieser folgt sofort eine Koordinatengleichung. Wie ermittelt man die Koordinaten des Schnittpunktes einer Geraden mit einer Ebene, von der eine Koordinatengleichung bekannt ist ? Aus einer Koordinatengleichung einer Ebene kann man Normalenvektoren ablesen. Verwende einen zur Zeichnung der Normalen zu E durch D.

b) Welche besondere Form einer Koordinatengleichung hat eine Koordinatenebene ?

## Lösung:

a) **Koordinatengleichung der Ebene E**

1. Möglichkeit: Parameterdarstellung von E:

$$\mathfrak{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + u \begin{pmatrix} 9 \\ -4{,}5 \\ 0 \end{pmatrix} + v \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ -4{,}5 \end{pmatrix}; \quad u, v \in \mathbb{R}.$$

Eliminiert man aus dieser Gleichung die Parameter u und v, so ergibt sich als Koordinatengleichung:

E: $x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 9 = 0$.

2. Möglichkeit: Die drei gegebenen Punkte A, B und C liegen auf den drei Koordinatenachsen. Deshalb erhält man sofort die Achsenabschnittsform von E:

$\frac{x_1}{9} + \frac{2x_2}{9} + \frac{2x_3}{9} = 1$ und hieraus eine Koordinatengleichung

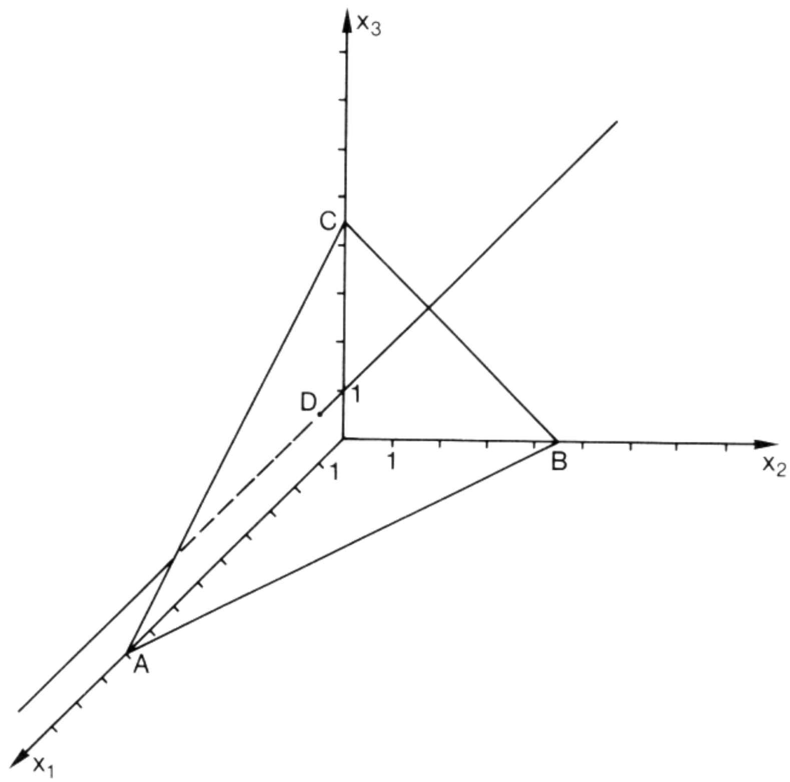
E: $x_1 + 2x_2 + 2x_3 - 9 = 0$.

**Koordinaten von D**

$g \cap E = \{D\}$: $(2+s)+2(3-2s)+2\cdot 2s-9=0$;
hieraus folgt $s=1$ und somit $D(3|1|2)$.

**Zeichnung**

Siehe Figur.




b) **Untersuchung der Ebenen $E_k$**

Für $k=0$ folgt $E_0$: $x_3=0$. Dies ist eine Gleichung der $x_1x_2$-Ebene.

Für die letzte Frage gibt es leider keine Musterlösung.