Lösungen zu S. 64ff

1 Auf einer Geraden

2

a) E_1 parallel zur x_2x_3-Ebene
E_2 parallel zur x_1x_3-Ebene
E_3 parallel zur x_1x_2-Ebene

b) E_1 parallel zur x_1-Achse
E_2 parallel zur x_2-Achse
E_3 parallel zur x_3-Achse

3

a) $x_1 + x_2 - x_3 = 3$

b) $6x_1 - 3x_2 - 2x_3 = -5$

c) $x_2 = 5$

d) $2x_1 - x_2 - x_3 = -2$

e) $3x_1 - x_3 = 2$

f) $x_1 - x_2 + x_3 = 23$

g) $5x_1 - 43x_2 - x_3 = -209$

h) $2x_1 - 5x_2 + 3x_3 = 88$

4

a) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{1}{3} \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) $\vec{x} = \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

e) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -25 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

f) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

g) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 9 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

h) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{13}{2} \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

i) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{11}{5} \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

j) $\vec{x} = r\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

k) $\vec{x} = r\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

l) $\vec{x} = r\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

5

a) $x_1 + 3x_2 - 9x_3 = 10$

b) $x_1 - 8x_2 + 9x_3 = 10$

c) $x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 10$

d) $5x_1 - 3x_2 + 15x_3 = 7$

e) $12x_1 + 9x_2 - 18x_3 = 200$

f) $x_1 + 4x_2 + 100x_3 = 10$

6

a) Menge aller Tripel reeller Zahlen

b) leere Menge

7

a) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 13 \\ 7 \end{pmatrix}$

b) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\vec{x} = \begin{pmatrix} -2 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$

d) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 8 \\ -7 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$

e) $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 6 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix}$

f) $\vec{x} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}$

8 a) E_1, E_2 schneiden sich in g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

b) $E_1 = E_2$

c) E_1 ist parallel zu E_2 und von E_2 verschieden.

d) E_1, E_2 schneiden sich in g: $\vec{x} = t\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

e) E_1, E_2 schneiden sich in g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

f) E_1, E_2 schneiden sich in g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0{,}2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 11 \end{pmatrix}$.

9 a) $S(2|-1|-3)$ b) $S(9|-38|-6)$ c) $S(-6|\frac{11}{3}|6)$

d) $S(0|0|0)$ e) $S(-\frac{13}{22}|-\frac{14}{11}|\frac{67}{22})$

f) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

10 a) g: $\vec{x} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 17 \\ 4 \\ 25 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ b) g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} -11 \\ 1 \\ 47 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 12 \end{pmatrix}$

c) g: $\vec{x} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 30 \\ -5 \\ 20 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 26 \\ -15 \\ 12 \end{pmatrix}$

11 a) $S(5|0|5)$ b) $S(0|2|8)$ c) $S(10|-2|2)$

d) $S(5|0|5)$ e) $S(25|-8|-7)$ f) $S(\frac{40}{3}|-\frac{10}{3}|0)$

12 a) s_{12}: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -20 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$; s_{13}: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 30 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$; s_{23}: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

b) s_{12}: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$; s_{13}: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 12 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$; s_{23}: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 12 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

c) s_{12}: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}$; s_{13}: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -4 \end{pmatrix}$; s_{23}: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 8 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$

d) s_{12}: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 7 \\ 6 \\ 0 \end{pmatrix}$; s_{13}: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}$; s_{23}: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 7 \end{pmatrix}$

e) s_{12}: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$; s_{13}: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$; s_{23}: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ -5 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

f) s_{12}: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; s_{13}: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3{,}5 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; s_{23}: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 7 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

13 a) $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\1\\4\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}1\\-1\\-1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}8\\1\\-4\end{pmatrix}$; $5x_1-4x_2+9x_3=32$

b) $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}3\\-6\\-1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}3\\-5\\7\end{pmatrix}$; $47x_1+24x_2-3x_3=65$

c) $\vec{x}=\begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}5\\-7\\12\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}$; $-7x_1+19x_2+14x_3=17$

d) $\vec{x}=\begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-2\\1\\9\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}2\\0\\-3\end{pmatrix}$; $-3x_1+12x_2-2x_3=30$

e) $\vec{x}=\begin{pmatrix}7\\7\\7\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-6\\4\\1\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\15\\2\end{pmatrix}$; $7x_1-13x_2+94x_3=616$

f) $\vec{x}=\begin{pmatrix}9\\3\\-3\end{pmatrix}+r\begin{pmatrix}-1\\1\\-6\end{pmatrix}+s\begin{pmatrix}1\\5\\-2\end{pmatrix}$; $14x_1-4x_2-3x_3=123$

14 a) $D(0|1|-1)$; $t=-3$ b) $D(-1|2|0)$; $t=-1$ c) $D(-6|1|-10)$; $t=-11$

15 a) $D(2|2|-4)$; $t=-2$ b) $D(5|8|5)$; $t=1$
c) Es existiert kein Durchstoßpunkt (g ist parallel zu E).

16 a) $D_1(15|0|0)$, $D_2(0|-10|0)$, $D_3(0|0|6)$
b) $D_1(7|0|0)$, $D_2(0|7|0)$, $D_3(0|0|-7)$
c) $D_1(30|0|0)$, $D_2(0|24|0)$, $D_3(0|0|-20)$
d) $D_1(10|0|0)$, D_2 existiert nicht, $D_3(0|0|-12)$
e) D_1 existiert nicht, $D_2(0|1{,}5|0)$, $D_3(0|0|2)$
f) $D_1(-14|0|0)$, $D_2(0|10|0)$, D_3 existiert nicht

17 a_1, a_2, a_3 Achsenabschnitte

18 a) Man wähle als zweiten Spannvektor der Reihe nach

$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$; die Ebenen haben dann die Koordinatengleichungen
$x_2-x_3=2$, $x_1-x_3=3$, $x_1-x_2=1$, $x_1-2x_2+x_3=-1$.
b) Man kann die zweiten Spannvektoren wie in a) wählen;
$2x_2+x_3=4$; $2x_1+5x_3=16$; $x_1-5x_2=-2$; $x_1-3x_2+x_3=2$.
c) Man kann die zweiten Spannvektoren wie in a) wählen;
$5x_2-3x_3=31$; $5x_1-x_3=23$; $2x_1-x_2=3$; $x_1-3x_2+x_3=-14$.

19 Man wähle a,b,c mit $a^2+b^2+c^2 \neq 0$.
a) $a(x_1-1)+b(x_2-4)\ +c(x_3+7)\ =0$
b) $a(x_1+3)+bx_2\qquad +c(x_3-8)\ =0$
c) $a(x_1-9)+b(x_2-17)+c(x_3-35)=0$
d) $a(x_1+6)+b(x_2-3)\ +c(x_3-7)\ =0$

20 a) $a=-1$; $b=-1{,}5$; $c=-3{,}5$
b) $a=-1$; $b=-1{,}5$; $c \neq -3{,}5$
c) $a \neq -1$ oder $b \neq -1{,}5$

21 $\vec{a}=\begin{pmatrix}5\\1\\-1\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}0\\4\\4\end{pmatrix}$, $\vec{c}=\begin{pmatrix}0\\8\\0\end{pmatrix}$

22 a) $g_1\colon \vec{x} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-2\\5\\3\end{pmatrix}$; $g_2\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-8\\1\\3\end{pmatrix}$; g_1, g_2 windschief

b) $g_1\colon \vec{x} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}7\\-13\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}3\\-4\\3\end{pmatrix}$; $g_2\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\0\\-2\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$; g_1, g_2 windschief

c) $g_1\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\-2\\1\end{pmatrix}$; $g_2\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\2\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix}$; $S(-2|3|0)$

d) $g_1\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}-2\\-4\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$; $g_2\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\-3\\0\end{pmatrix} + t\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$; g_1, g_2 parallel, $g_1 \neq g_2$

23 a) $2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 5$ b) $6x_1 + 6x_2 + x_3 = 9$ c) $2x_1 + x_3 = 2$ d) $2x_1 + 2x_2 + 2x_3 = 3$