Lösungen S.28-30

S. 27 **1** a) nein b) ja: $\vec{x} = -\vec{a} - \vec{c}$

S. 28 **2** Das Gleichungssystem $\begin{cases} 7r + 5s = 0 \\ r + 3s = 0 \end{cases}$ hat nur die Lösung $r = s = 0$.

Das Gleichungssystem $\begin{cases} 7r + 5s + 12t = 0 \\ r + 3s + 4t = 0 \end{cases}$ hat u.a. die Lösung $r = 1$, $s = 1$, $t = -1$.

Man kann aber auch sofort sehen, daß $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ kein Vielfaches von $\begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist, und daß $\begin{pmatrix} 12 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ gilt.

S. 29 **3** Das Gleichungssystem $\begin{cases} 2r = 0 \\ 3s = 0 \\ 7t = 0 \end{cases}$ hat nur die Lösung $r = s = t = 0$. Es gilt

$$\begin{pmatrix} 42 \\ 42 \\ 42 \end{pmatrix} = 21 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 14 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + 6 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{pmatrix}.$$

4 a), b), d), f), h), j) linear unabhängig;
c), e), g), i) linear abhängig.

S. 29 **5** a) $\overrightarrow{OP} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$; $\overrightarrow{E_1Q} = -\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3$;
$\overrightarrow{E_2R} = \vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3$; $\overrightarrow{E_3S} = \vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3$.

b) Aus $r\overrightarrow{OP} + s\overrightarrow{E_1Q} + t\overrightarrow{E_2R} = r(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3) + s(-\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3) + t(\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3)$
$= (r - s + t)\vec{e}_1 + (r + s - t)\vec{e}_2 + (r + s + t)\vec{e}_3 = \vec{o}$
folgt aufgrund der linearen Unabhängigkeit von $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$:

$$\begin{cases} r - s + t = 0 \\ r + s - t = 0. \\ r + s + t = 0 \end{cases}$$

Dieses Gleichungssystem hat nur die Lösung $r = s = t = 0$.
Entsprechend ergibt sich die lineare Unabhängigkeit in den drei verbleibenden Fällen.

c)
$$\overrightarrow{OP} = r\overrightarrow{E_1Q} + s\overrightarrow{E_2R} + t\overrightarrow{E_3S}$$
$$\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3 = r(-\vec{e}_1 + \vec{e}_2 + \vec{e}_3) + s(\vec{e}_1 - \vec{e}_2 + \vec{e}_3) + t(\vec{e}_1 + \vec{e}_2 - \vec{e}_3)$$
$$(1 + r - s - t)\vec{e}_1 + (1 - r + s - t)\vec{e}_2 + (1 - r - s + t)\vec{e}_3 = \vec{o}$$

$$\begin{cases} -r + s + t = 1 \\ r - s + t = 1 \\ r + s - t = 1 \end{cases} \quad \text{liefert } r = s = t = 1.$$

Aus $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{E_1Q} + \overrightarrow{E_2R} + \overrightarrow{E_3S}$ ergeben sich die übrigen Darstellungen.

6 Von je zwei der Vektoren erkennt man sofort, daß der eine kein Vielfaches des anderen ist.

a) $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} = -\frac{1}{4}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} + \frac{3}{4}\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} = -4\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}5\\2\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix} + \frac{4}{3}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} = -\frac{22}{19}\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix} + \frac{10}{19}\begin{pmatrix}6\\11\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix} = -\frac{19}{22}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} + \frac{5}{11}\begin{pmatrix}6\\11\end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix}6\\11\end{pmatrix} = \frac{19}{10}\begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} + \frac{11}{5}\begin{pmatrix}1\\5\end{pmatrix}$

7 b), c), f), h) linear abhängig; a), d), e), g) linear unabhängig

8 a) $a = \frac{15}{2}$ b) $a = -3$ c) $a = 1$ d) $a = 0$
e) $a = 11$ f) $a = 1$ g) $a = \frac{25}{6}$ h) $a = 0$
i) $a = -\frac{1}{2}$ j) $a = 1$ oder $a = \frac{5}{3}$ k) für jedes a

9 Für $a = \frac{3}{2}$ (unabhängig von b) und für $b = 12$ (unabhängig von a).

S. 30 **10** a) Aus $\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 3\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ ergeben sich die Darstellungen

$$\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix} - 3\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} - 4\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix} - \frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{4}{3}\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1\\3\\4\end{pmatrix} - \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} - \frac{3}{4}\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

b) Aus $\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ ergeben sich die Darstellungen

$$\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

c) Aus $\begin{pmatrix}5\\-1\\2\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ ergeben sich die Darstellungen

$$\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix}5\\-1\\2\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} - \frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\-1\\2\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\-1\\2\end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$$

11 a) nein b) nein c) ja d) nein

12 a) $\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{TS} = \frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}$

$\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{UT} = \frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}$

$\overrightarrow{RS} = \overrightarrow{PU} = -\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}$

Die drei Vektoren $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{QR}$, $\overrightarrow{RS}$ (und damit je drei der sechs Kantenvektoren des Sechsecks PQRSTU) sind linear abhängig:

$\overrightarrow{PQ} - \overrightarrow{QR} + \overrightarrow{RS} = (\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}) - (\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}) + (-\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{c}) = \vec{o}$.

b) Die Vektoren $\overrightarrow{PQ}$, $\overrightarrow{QR}$ und $\overrightarrow{SV} = -\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{c}$ sind linear unabhängig:

$r(\frac{1}{2}\vec{a} + \frac{1}{2}\vec{b}) + s(\frac{1}{2}\vec{b} + \frac{1}{2}\vec{c}) + t(-\frac{1}{2}\vec{a} - \frac{1}{2}\vec{c}) = \vec{o}$ liefert das LGS

$\begin{cases} r - t = 0 \\ r + s = 0 \\ s - t = 0 \end{cases}$ mit der eindeutigen Lösung $r = s = t = 0$.