29 Kreise in der Ebene

S. 122 **1**

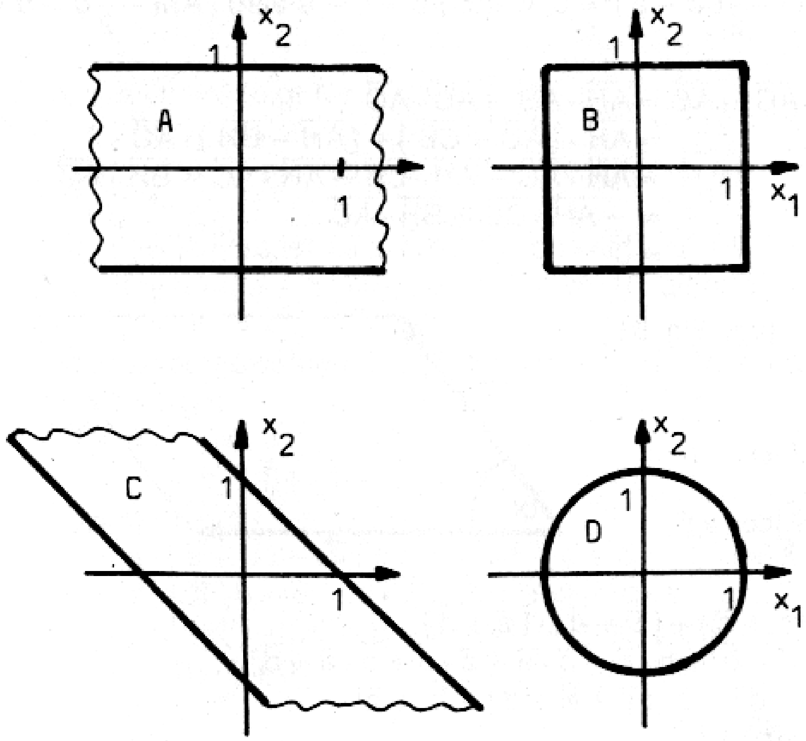

Fig. 83

2 $(x_1-3)^2+(x_2-2)^2=25$ nach dem Satz des Pythagoras

S. 123 **3**

a) $(3-2)^2+(7-4)^2=10>9$: P liegt im Äußern von k.
b) $(2-2)^2+(7-4)^2=9$: P liegt auf k.
c) $(3-2)^2+(6-4)^2=5<9$: P liegt im Innern von k.

4

a) $(\vec{x}-\begin{pmatrix}5\\7\end{pmatrix})^2=36$
$(x_1-5)^2+(x_2-7)^2=36$
$x_1^2+x_2^2-10x_1-14x_2+38=0$

b) $(\vec{x}-\begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix})^2=4$
$(x_1+1)^2+(x_2-3)^2=4$
$x_1^2+x_2^2+2x_1-6x_2+6=0$

c) $(\vec{x}-\begin{pmatrix}9\\0\end{pmatrix})^2=81$
$(x_1-9)^2+x_2^2=81$
$x_1^2+x_2^2-18x_1=0$

d) $(\vec{x}-\begin{pmatrix}-3\\-4\end{pmatrix})^2=25$
$(x_1+3)^2+(x_2+4)^2=25$
$x_1^2+x_2^2+6x_1+8x_2=0$

5

a) $(x_1-3)^2+(x_2-2)^2=16$; $M(3|2)$; $r=4$
b) $(x_1+3)^2+(x_2-6)^2=-5$; keine Kreisgleichung
c) $(x_1+5)^2+(x_2+7)^2=4$; $M(-5|-7)$; $r=2$
d) $x_1^2+x_2^2=-1$; keine Kreisgleichung
e) $(x_1-\frac{1}{2})^2+x_2^2=\frac{1}{4}$; $M(\frac{1}{2}|0)$; $r=\frac{1}{2}$
f) $(x_1-2)^2+(x_2+3)^2=-17$; keine Kreisgleichung

S. 123 **6** a) P liegt auf k.
b) P liegt im Äußern von k.
c) P liegt auf k.
d) P liegt im Innern von k.
e) Es liegt kein Kreis vor, da $r^2 < 0$.
f) P liegt im Innern von k.

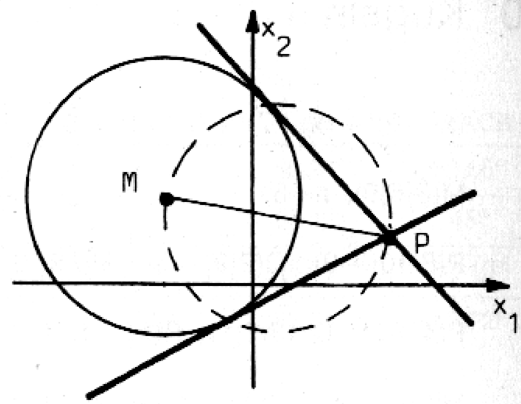

Fig. 84

7 a) $S_1(-1|2)$; $S_2(\frac{22}{5}|\frac{1}{5})$
b) Es existieren keine Schnittpunkte.
c) $S_1(5|-2)$; $S_2(6|5)$
d) $S_1(6|7)$;
$S_2 = S_1$ (Berührpunkt)
e) $S_1(3|3)$; $S_2(7|-1)$
f) $S_1(0|-5)$; $S_2(5|20)$
g) $S_1(8|-6)$; $S_2(-8|2)$
h) Es existieren keine Schnittpunkte.

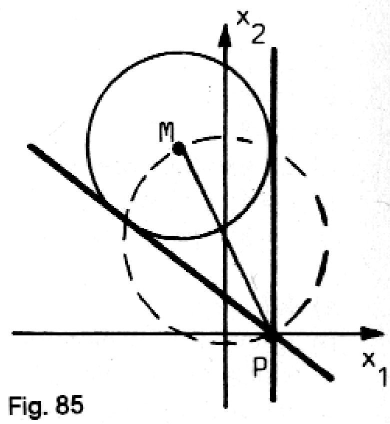

Fig. 85

8 Es gibt zwei solche Kreise; ihre Mittelpunkte sind
$M_1(0|-17)$ bzw. $M_2(8|15)$.

9 a) $(x_1-\frac{7}{2})^2+(x_2-\frac{7}{2})^2=\frac{49}{2}$ b) $(x_1+2)^2+(x_2+2)^2=50$
c) $(x_1+6)^2+(x_2+6)^2=225$

10 a) Es gibt zwei solche Kreise: $(x_1+r)^2+(x_2-r)^2=r^2$ mit
$(x_1-1)^2+(x_2-1)^2=1$ oder $(x_1-5)^2+(x_2-5)^2=25$.
b) $(x_1+1)^2+(x_2-2)^2=4$
c) Es gibt zwei solche Kreise: $(x_1-r)^2+(x_2-m)^2=r^2$ mit
$(x_1-3)^2+(x_2-1)^2=9$ oder $(x_1-15)^2+(x_2-13)^2=225$

11 a) $(x_1-\frac{7}{2})^2+(x_2-\frac{11}{2})^2=\frac{25}{2}$ b) $(x_1-3)^2+(x_2+7)^2=25$

30 Kugeln

S. 124 **1** $(x_1-2)^2+(x_2-7)^2+(x_3-1)^2=9$

S. 125 **2** $M(3|5|9)$, $r=5$

3 $P(8|10|-3)$; $Q(9|9|-3)$; $R(6|9|2)$

4 $P(4|1|2)$; $Q(13|2|1)$; $R(5|-4|5)$

5 Mit I(k) bzw. A(k) wird das Innere bzw. Äußere der Kugel k bezeichnet.
a) $A \in k$, $B \in I(k)$, $C \in A(k)$
b) $A \in A(k)$, $B \in A(k)$, $C \in I(k)$

6 a) $r=\sqrt{2}$
b) $r=3$
c) $r=8$
d) Es existiert keine Kugel, da $M \in E$.
e) $r=4$; $E: 6x_1+10x_2+15x_3=97$
f) $r=5$; $E: 2x_1+14x_2+23x_3=105$

7 a) $M(-2|4|-3)$; $r=5$
b) keine Kugelgleichung
c) keine Kugelgleichung
d) keine Kugelgleichung $(r=0)$

8 $d=\sqrt{144+16+36}-7-3=4$

9 $S_1(-1|3|4)$, $S_2(5|-3|10)$

31 Vermischte Aufgaben

S. 126 **1**

	$\overline{BC}$	$\overline{AC}$	$\overline{AB}$	$\sphericalangle$ BAC	$\sphericalangle$ ABC	$\sphericalangle$ ACB
a)	$\sqrt{26}$	$\sqrt{41}$	$\sqrt{37}$	48,12°	69,23°	62,65°
b)	$\sqrt{45}$	$\sqrt{40}$	5	71,57°	63,43°	45°
c)	$\sqrt{42}$	$\sqrt{42}$	$\sqrt{46}$	58,45°	58,45°	63,10°
d)	7	7	$\sqrt{26}$	68,64°	68,64°	42,72°

2 a) $\alpha = 67{,}38°$; $\beta = 90°$; $\gamma = 22{,}62°$

b) $w_{\alpha_1}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 9 \\ -12 \\ 10 \end{pmatrix}$, $\quad w_{\alpha_2}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 6 \\ -8 \\ -15 \end{pmatrix}$

$w_{\beta_1}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$, $\quad w_{\beta_2}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -5 \end{pmatrix}$

$w_{\gamma_1}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 25 \end{pmatrix}$, $\quad w_{\gamma_2}: \vec{x} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 9 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ -1 \end{pmatrix}$

3 a) $t\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$ b) $t\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$ c) $t\begin{pmatrix} 7 \\ -4 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$

4 a) $t\begin{pmatrix} 5 \\ -5 \\ -7 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$ b) $t\begin{pmatrix} 3 \\ 13 \\ -7 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$ c) $t\begin{pmatrix} 7 \\ -18 \\ 10 \end{pmatrix}$ mit $t \in \mathbb{R}$

5 a) Das Gleichungssystem $\begin{cases} 2x_1 + 3x_2 = \frac{1}{2}\sqrt{13} \\ x_1^2 + x_2^2 = 1 \end{cases}$ liefert zwei Einheitsvektoren; als Lösung der Aufgabe ergeben sich alle Vielfachen der Vektoren

$$\begin{pmatrix} 1 + \frac{3}{2}\sqrt{3} \\ \frac{3}{2} - \sqrt{3} \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \begin{pmatrix} 1 - \frac{3}{2}\sqrt{3} \\ \frac{3}{2} + \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

b) Vielfache von $\begin{pmatrix} 7 + \sqrt{3} \\ 1 - 7\sqrt{3} \end{pmatrix}$ und von $\begin{pmatrix} 7 - \sqrt{3} \\ 1 + 7\sqrt{3} \end{pmatrix}$

c) Vielfache von $\begin{pmatrix} 5 + 9\sqrt{3} \\ 9 - 5\sqrt{3} \end{pmatrix}$ und von $\begin{pmatrix} 5 - 9\sqrt{3} \\ 9 + 5\sqrt{3} \end{pmatrix}$

S. 126 **6** Das Gleichungssystem $\begin{cases} x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 \qquad = \frac{1}{2}\sqrt{2} \\ x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 1 \end{cases}$ liefert zwei Einheitsvektoren, deren Vielfache Lösungen der Aufgabe sind; es ergeben sich die Vielfachen von

$\frac{1}{2}\sqrt{2}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ bzw. $\frac{1}{2}\sqrt{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

7 $|\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{79}$; $|\vec{a}-\vec{b}| = \sqrt{37}$; $|2\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{127}$; $|4\vec{a}-3\vec{b}| = \sqrt{333}$

8 $|4\vec{a}-6\vec{b}| = \sqrt{28}$; $|4\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{21}$; der eingeschlossene Winkel beträgt 90°.

9 a) Aus $(2\vec{a}+4\vec{b})\cdot(7\vec{a}-3\vec{b}) = 0$ und $|\vec{a}| = 3$, $|\vec{b}| = 5$ folgt
$\cos\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = \frac{156}{330}$, also $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = 61{,}79°$.
b) 62,18° c) 137,17°

10 a) $r = -2$ b) $r = \frac{12}{5}$ c) $r = \frac{1}{3}$ oder $r = -3$

11 a) $|\vec{b}| = \sqrt{10}$; $\vec{a}\cdot\vec{b} = -4$; $\sphericalangle(\vec{a},\vec{b}) = 108{,}43°$
b) (1) $\vec{a}\cdot(\vec{a}+4\vec{b}) = \vec{a}^2 + 4\vec{a}\cdot\vec{b} = 16 + 4(-4) = 0$
(2) $(\vec{a}+4\vec{b})^2 = \vec{a}^2 + 8\vec{a}\cdot\vec{b} + 16\vec{b}^2 = 144 = 9\vec{a}^2$
(3) $\vec{b}\cdot(5\vec{a}+2\vec{b}) = 5\vec{a}\cdot\vec{b} + 2\vec{b}^2 = -20 + 20 = 0$
(4) $(5\vec{a}+2\vec{b})^2 = 25\vec{a}^2 + 20\vec{a}\cdot\vec{b} + 4\vec{b}^2 = 360 = 36\vec{b}^2$
(5) $(7\vec{a}+4\vec{b})\cdot(\vec{a}-8\vec{b}) = 7\vec{a}^2 - 52\vec{a}\cdot\vec{b} - 32\vec{b}^2 = 102 + 208 - 310 = 0$
(6) $(7\vec{a}+4\vec{b})^2 = 720$; $(\vec{a}-8\vec{b})^2 = 720$

12 $P_1(-4|2|5)$ oder $P_2\left(-\frac{4}{85}\middle|\frac{458}{85}\middle|5\right)$

S. 127 **13** Für den Ortsvektor $\vec{x}$ eines Punktes der Mittelsenkrechten von AB gilt $(\vec{x}-\vec{a})^2 = (\vec{x}-\vec{b})^2$, also $\vec{x}^2 - 2\vec{a}\cdot\vec{x} + \vec{a}^2 = \vec{x}^2 - 2\vec{b}\cdot\vec{x} + \vec{b}^2$, woraus die behauptete Gleichung folgt.

14 Vgl. Aufgabe 13

15 a) g: $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$
$d(P,g) = \sqrt{2}$; $d(Q,g) = 0$; $d(R,g) = \frac{1}{2}\sqrt{2}$
b) g: $\frac{1}{\sqrt{13}}(2x_1 - 3x_2 - 5) = 0$
$d(P,g) = \frac{30}{\sqrt{13}}$; $d(Q,g) = \frac{7}{\sqrt{13}}$; $d(R,g) = \frac{11}{\sqrt{13}}$

c) g: $\frac{1}{17}\left[\begin{pmatrix} 8 \\ 15 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 1\right] = 0$

$d(P,g) = 1$; $d(Q,g) = 2$; $d(R,g) = 0$

S. 127 **16** a) 51 Flächeneinheiten b) 20 Flächeneinheiten

17 a) E: $\frac{1}{21}\left[\begin{pmatrix} 6 \\ 9 \\ 18 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 78\right] = 0$

$d(P,E) = 3$; $d(Q,E) = 2$; $d(R,E) = 0$

b) E: $\frac{1}{11}(7x_1 - 6x_2 + 6x_3 - 2) = 0$

$d(P,E) = 5$; $d(Q,E) = 0$; $d(R,E) = \frac{2}{11}$

c) E: $\left(\vec{x} - \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{11}}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 0$

$d(P,E) = \frac{8}{\sqrt{11}}$; $d(Q,E) = \frac{5}{\sqrt{11}}$; $d(R,E) = \frac{2}{\sqrt{11}}$

18 a) $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} = 0$, also $g \| E$

E: $\frac{1}{9}\left[\begin{pmatrix} 7 \\ -4 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 3\right] = 0$

$d(g,E) = 10$

b) $\begin{pmatrix} 8 \\ 8 \\ -4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ -4 \\ 2 \end{pmatrix} = 0$, also $g \| E$

E: $\frac{1}{12}(8x_1 + 8x_2 - 4x_3 - 9) = 0$

$d(g,E) = \frac{1}{4}$

c) E: $\frac{1}{\sqrt{3}}\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 7\right] = 0$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$, also $g \| E$

$d(g,E) = 0$

d) E: $\frac{1}{\sqrt{2}}\left[\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 13\right] = 0$

$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = 0$, also $g \| E$

$d(g,E) = \sqrt{2}$

19 Schnittgerade $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} -7 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix}$

a) E: $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} + 6 = 0$

b) E: $\begin{pmatrix} 25 \\ -62 \\ 61 \end{pmatrix} \cdot \vec{x} - 236 = 0$

c) E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + r\begin{pmatrix} -7 \\ 8 \\ 11 \end{pmatrix} + s\begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

E: $32x_1 + 61x_2 - 24x_3 = -119$