Wir betrachten die Funktionsterme

$$f_a(x) = \frac{1}{8}(x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - 12x); \quad a \in \mathbb{R}$$

Für jeden Wert von a erhalten wir im allgemeinen eine andere Funktion; a heißt Parameter der Kurvenschar.
Wir könnten für verschiedene Werte von a die einzelnen Funktionen diskutieren, versuchen aber, die gesamte Schar auf einmal zu besprechen, indem wir das a nicht mit einer Zahl »festnageln«.
Wir gehen für unsere Diskussion nach unserem alten Schema vor.

1 *Maximale Definitionsmenge* ist für alle Kurven der Schar $D_{f_a} = \mathbb{R}$.

2 *Symmetrie*

$$\begin{aligned} f_a(-x) &= \frac{1}{8}(-x^3 - 3ax^2 - 3a^2x + 12x) = \\ &= -\frac{1}{8}(x^3 + 3ax^2 + 3a^2x - 12x) \end{aligned}$$

Dieser Term stimmt nur für $a = 0$ mit $-f_a(x)$ überein.
Nur G_{f_0} ist symmetrisch zum Ursprung.

3 *Nullstellen*

$$f_a(x) = \frac{1}{8}x(x^2 - 3ax + 3a^2 - 12)$$

Jedes f_a hat bei $x_1 = 0$ eine (mindestens) einfache Nullstelle.
Weitere Nullstellen sind die Lösungen der Gleichung

$$x^2 - 3ax + 3a^2 - 12 = 0.$$

Reelle Lösungen ergeben sich nur dann, wenn die Diskriminante $D \geqq 0$ ist

$$D = 9a^2 - 4(3a^2 - 12) = 3(16 - a^2)$$

Bild 111 zeigt D als Funktion von a.

Für $|a| > 4$ gibt es außer $x_1 = 0$ (einfache Nullstelle) keine weiteren Nullstellen.

Für $|a| = 4$ gibt es neben $x_1 = 0$ noch je eine doppelte Nullstelle bei $x_2 = \frac{3}{2}a$, also für $a = 4$ ist $x_2 = 6$ und für $a = -4$ ist $x_2 = -6$.

Für $|a| < 4$ gibt es außer $x_1 = 0$ zwei weitere Nullstellen

$$x_{2,3} = \frac{3a \pm \sqrt{D}}{2}$$

sie sind einfach, wenn nicht ausgerechnet eine davon mit x_1 zusammenfällt. Überprüfen wir's:

$3a \pm \sqrt{D} = 0$, also $D = 9a^2$
$48 - 3a^2 = 9a^2$, also $48 = 12a^2$, also $|a| = 2$.

f_2 und f_{-2} haben bei 0 eine doppelte Nullstelle; ihre Graphen berühren dort die x-Achse ohne Vorzeichenwechsel (Extrempunkt).

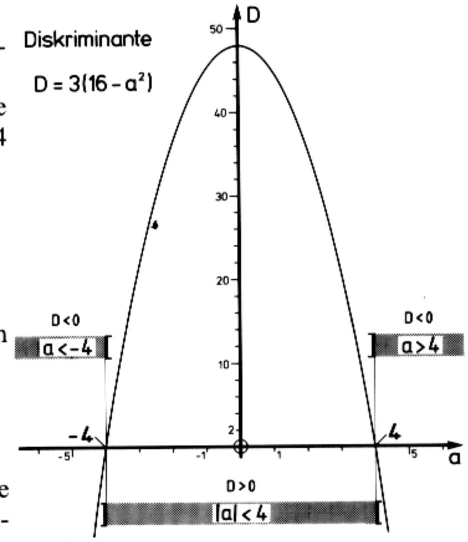


Bild 111

4 *Waagrechte Tangenten*

$f_a'(x) = \frac{3}{8}(x^2 - 2ax + a^2 - 4)$

Waagrechte Tangenten sind da, wo $f_a'(x) = 0$ ist.

$x^2 - 2ax + a^2 - 4 = 0, \quad D = 16$

Weil D unabhängig von a immer positiv ist, hat jede Scharkurve zwei Punkte mit waagrechten Tangenten

$$x_{4,5} = \frac{2a \pm 4}{2} = a \pm 2; \quad y_{4,5} = \tfrac{1}{8}(a \pm 2)(a^2 \mp 2a - 8).$$

Jetzt bestätigt sich, daß für $|a| = 2$ die x-Achse Tangente ist.

5 *Monotonie*

Die beiden Nullstellen x_4 und x_5 von f_a' sind einfach, f_a' wechselt dort das Vorzeichen, G_{f_a} hat dort Extrempunkte; ihre Art erkennen wir in der Tabelle des Monotonieverhaltens.

	$x <$	$x_5 = a - 2$	$< x <$	$x_4 = a + 2$	$< x$
$\operatorname{sgn} f_a'(x)$	$+1$	0	-1	0	$+1$
G_{f_a}	steigt ╱	waagr. HOP	fällt ╲	waagr. TIP	steigt ╱

6 *Flachpunkte*

$f_a''(x) = \frac{3}{4}(x - a)$

Flachpunkte sind da, wo $f_a''(x) = 0$ ist, also bei $x_6 = a$,
$y_6 = \frac{1}{8}a(a^2 - 12)$.

Die Nullstelle x_6 von f_a'' ist einfach, f_a'' wechselt dort das Vorzeichen. G_{f_a} hat dort einen Wendepunkt; seine Art erkennen wir in der Tabelle des Krümmungsverhaltens.

	$x <$	$x_6 = a$	$< x$
$\operatorname{sgn} f_a''(x)$	-1	0	$+1$
Krümmung	rechts	WEP	links

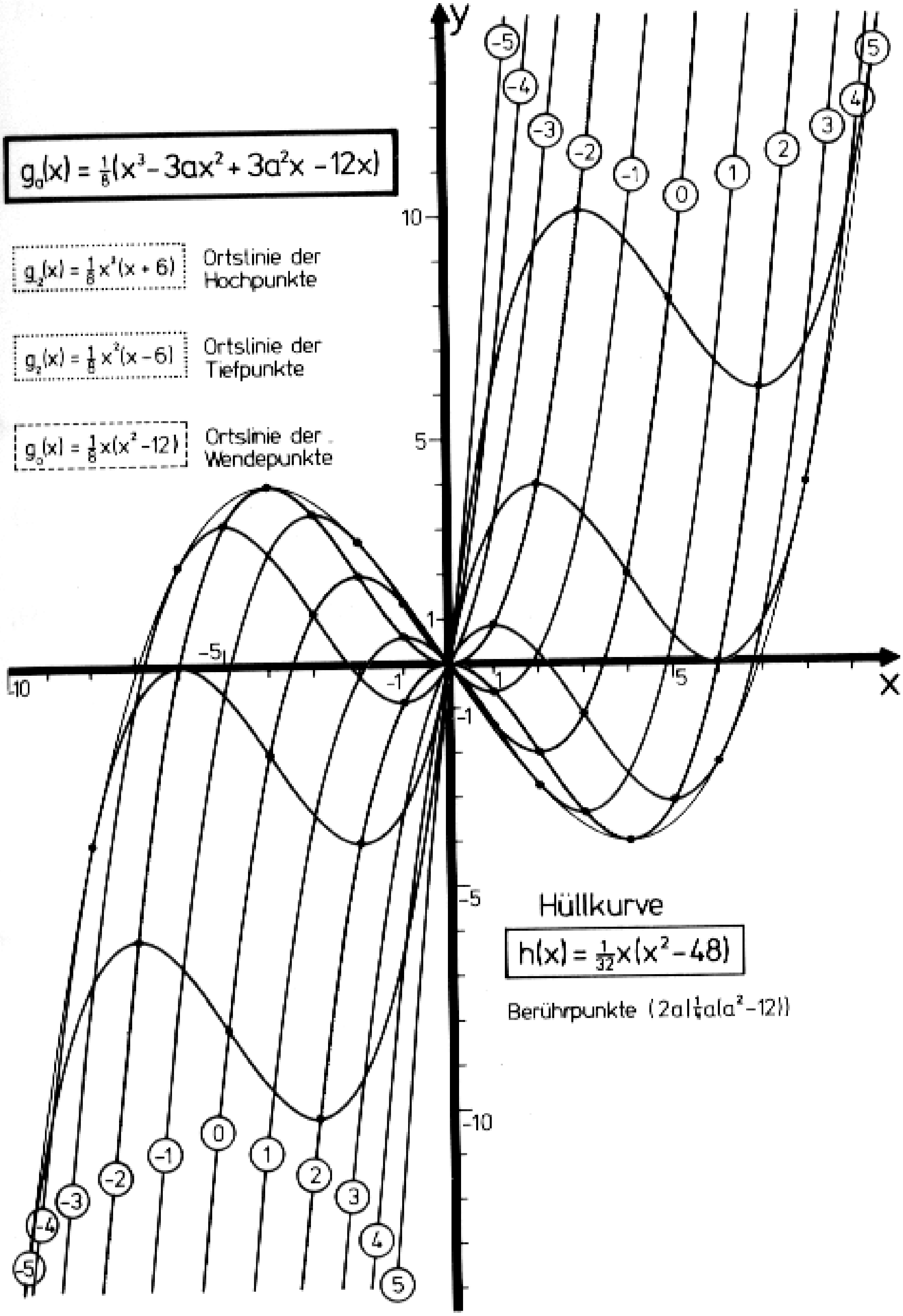
Die übliche Kurvendiskussion ist damit abgeschlossen. Um einen noch besseren Überblick über die Kurvenschar zu erhalten, untersuchen wir zusätzlich, wie sich Punkte mit einer bestimmten Eigenschaft bewegen, wenn wir den Parameter a verändern.
Was machen z.B. Hochpunkte oder Tiefpunkte bei Veränderung von a?
Für die Hochpunkte gilt: $x = a - 2 (= x_5)$, die zugehörigen Ordinaten sind $y = f_a(x)$. Der Parameter a vermittelt einen Zusammenhang zwischen dem x- und y-Wert eines Hochpunkts. Beseitigen (eliminieren) wir nun den Vermittler a, dann bleibt eine Gleichung für die Koordinaten der Hochpunkte übrig.
Aus $x = a - 2$ folgt $a = x + 2$, eingesetzt in die Funktionsgleichung liefert
$y = f_{x+2}(x) = \frac{1}{8}x(x^2 + 3(x+2)x + 3(x+2)^2 - 12) = \frac{1}{8}x^2(x+6)$
Jeder Hochpunkt liegt auf der Kurve mit der Gleichung
$y = \frac{1}{8}x^2(x+6)$.
Umgekehrt finden wir zu jedem Punkt $P\left(x \mid \frac{1}{8}x^2(x+6)\right)$ einen Wert für a, nämlich $x + 2$, so daß P Hochpunkt von G_{f_a} ist.
Eine solche Kurve heißt **Ortslinie** der Hochpunkte.
Für die Ortslinie der Tiefpunkte ergibt sich entsprechend
$y = \frac{1}{8}x^2(x-6)$.
Für die Ortslinie der Wendepunkte ergibt sich $y = \frac{1}{8}x(x^2 - 12)$.
Im Bild 112 sind die Ergebnisse grafisch zusammengefaßt.

Zu guter Letzt ein Rezept:

Wir bestimmen z.B. ein Kurve, auf der die Punkte waagrechter Tangenten liegen:

- **Man löst die Gleichung $f_a'(x) = 0$ nach a auf und erhält $a = v(x)$.**
- **Man ersetzt a in $y = f_a(x)$ durch $v(x)$. Das Ergebnis ist die Gleichung der gesuchten Kurve.**

Will man eine Kurve, auf der Punkte mit einer anderen Eigenschaft liegen, so muß man dasselbe Verfahren mit einer anderen Bedingungsgleichung entsprechend durchführen.



$g_a(x) = \frac{1}{8}(x^3 - 3ax^2 + 3a^2x - 12x)$
$g_2(x) = \frac{1}{8}x^2(x+6)$ Ortslinie der Hochpunkte
$g_2(x) = \frac{1}{8}x^2(x-6)$ Ortslinie der Tiefpunkte
$g_3(x) = \frac{1}{8}x(x^2-12)$ Ortslinie der Wendepunkte
Hüllkurve
$h(x) = \frac{1}{32}x(x^2-48)$
Berührpunkte $(2a \mid \frac{1}{4}a(a^2-12))$