Lösung:
a)

Nullstellen

$\frac{1}{10}a(x^2+1)+x=0 \Rightarrow ax^2+10x+a=0$

Diskriminante $D = 100-4a^2 = 4(25-a^2)$

$$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25-a^2}}{a},\ a \neq 0 \text{ und } |a| \leqq 5$$

Für $0 < |a| < 5$ haben Scharkurven zwei einfache Nullstellen.

Für $|a| = 5$, also $a = \pm 5$, gibt es je eine doppelte Nullstelle.

Für $|a| > 5$ haben Scharkurven keine Nullstellen,
weil der Radikand (hier die Diskriminante) negativ ist.

Für $a = 0$ ist die Formel nicht anwendbar. Deshalb setzen wir $a = 0$ in die Ausgangsgleichung ein: $10x = 0 \Rightarrow x = 0$.

In diesem Fall ist die Parabel entartet zur Gerade $f_0(x) = x$.

Zusammenfassung

$a = 0$	$x = 0$	einfache Nullstelle von f_0
$0 < \|a\| < 5$	$x = \frac{-5 \pm \sqrt{25-a^2}}{a}$	2 einfache Nullstellen
$a = 5$	$x = -1$	doppelte Nullstelle von f_5
$a = -5$	$x = 1$	doppelte Nullstelle von f_{-5}
$\|a\| > 5$		keine Nullstelle

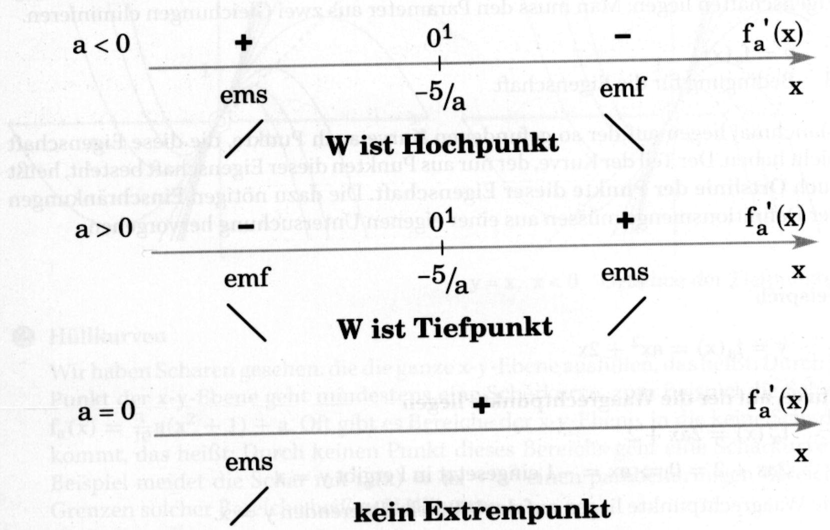
b) $f_a(-x) = \frac{1}{10}a\left((-x)^2+1\right)+(-x) = \frac{1}{10}a\left(x^2+1\right)-x \neq f_a(x) \text{ bzw. } -f_a(x)$

Keine Symmetrie eines Graphen zum Koordinatensystem!

c)

$f'_a(x) = \frac{1}{5}ax+1$

Für die Monotonie-Untersuchung muss man die Fälle $a > 0$, $a = 0$ und $a < 0$ unterscheiden, also 3 Vorzeichenübersichten anlegen.



d)

Extrempunkte

$f'_a(x) = \frac{1}{5}ax + 1$

Waagrechtstellen: $\frac{1}{5}ax + 1 = 0$

$a \neq 0 \Rightarrow x = -\frac{5}{a}$ $\quad W\left(-\frac{5}{a} \middle| \frac{a^2-25}{10a}\right)$

$a = 0 \Rightarrow 1 = 0$ $\quad$ Widerspruch, kein Waagrechtpunkt

Bei Scharen ist es oft einfacher, die Art der Extrempunkte mit der 2. Ableitung zu bestimmen. Hier ist $f_a''(x) = \frac{1}{5}a$

$a < 0 \Rightarrow f_a''(-5/a) < 0 \Rightarrow$ W ist Hochpunkt

$a > 0 \Rightarrow f_a''(-5/a) > 0 \Rightarrow$ W ist Tiefpunkt

$a = 0 \Rightarrow f_a''(-5/a) = 0 \Rightarrow ?$

Hier ist eine eigene Untersuchung nötig. Es handelt es sich um die Winkelhalbierende, sie hat keinen Extrempunkt.