d) Berechne den Schnittpunkt zweier Scharkurven.

$$f_{a_1}(x) = f_{a_2}(x)$$

$$x^2 + a_1 x + \frac{1}{2}a_1^2 = x^2 + a_2 x + \frac{1}{2}a_2^2$$

$$x(a_1 - a_2) = \frac{1}{2}\left(a_2^2 - a_1^2\right) \quad \Big| : (a_1 - a_2) \quad \text{erlaubt, da } a_1 \neq a_2$$

$$x = -\frac{a_1^2 - a_2^2}{2(a_1 - a_2)} = -\frac{a_1 + a_2}{2}$$

$$y = f_{a_1}(x) = \left(-\frac{a_1 + a_2}{2}\right)^2 - a_1 \frac{a_1 + a_2}{2} + \frac{a_1^2}{2}$$

$$= \frac{(a_1 + a_2)^2}{4} - \frac{a_1^2 + a_1 a_2 - a_1^2}{2}$$

$$= \frac{a_1^2 + 2a_1 a_2 + a_2^2 - 2a_1 a_2}{4}$$

$$= \frac{a_1^2 + a_2^2}{4}$$

Schnittpunkt S zweier Scharkurven (Parameter a_1 und a_2):

$$S\left(-\frac{a_1 + a_2}{2} \,\middle|\, \frac{a_1^2 + a_2^2}{4}\right)$$

e) Untersuche, ob es Paare von Scharkurven gibt, die bezüglich des Koordinatensystems symmetrisch liegen.

<u>Symmetrie zur y-Achse</u>:

$$f_{a_1}(x) = f_{a_2}(-x)$$

$$x^2 + a_1 x + \frac{1}{2}a_1^2 = (-x)^2 + a_2(-x) + \frac{1}{2}a_2^2$$

$$(a_1 + a_2)x + \frac{1}{2}\left(a_1^2 - a_2^2\right) = 0 \quad \text{für alle x aus D}$$

$$\left.\begin{array}{ll} \text{(I)} & a_1 + a_2 = 0 \\ \text{(II)} & a_1^2 - a_2^2 = (a_1 - a_2)(a_1 + a_2) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow a_1 + a_2 = 0 \Rightarrow a_1 = -a_2$$

<u>Symmetrie zum Ursprung</u>:

$$-f_{a_1}(x) = f_{a_2}(-x)$$

$$-x^2 - a_1 x - \frac{1}{2}a_1^2 = (-x)^2 + a_2(-x) + \frac{1}{2}a_2^2$$

$$-2x^2 + (-a_1 + a_2)x + \frac{1}{2}\left(-a_1^2 - a_2^2\right) = 0 \quad \text{für alle x aus D ist unmöglich!}$$

Keine Symmetrie zum Ursprung!

<u>Symmetrie zur x-Achse</u>:

$$f_{a_1}(x) = -f_{a_2}(x)$$

$$x^2 + a_1 x + \frac{1}{2}a_1^2 = -x^2 - a_2 x - \frac{1}{2}a_2^2$$

$$2x^2 + (a_1 + a_2)x + \frac{1}{2}\left(a_1^2 + a_2^2\right) = 0 \quad \text{für alle x aus D ist unmöglich!}$$