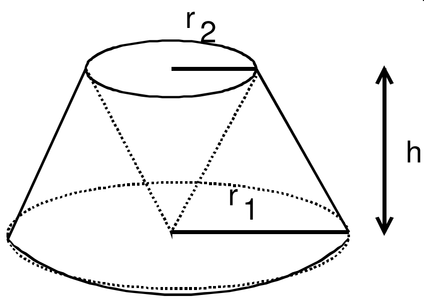
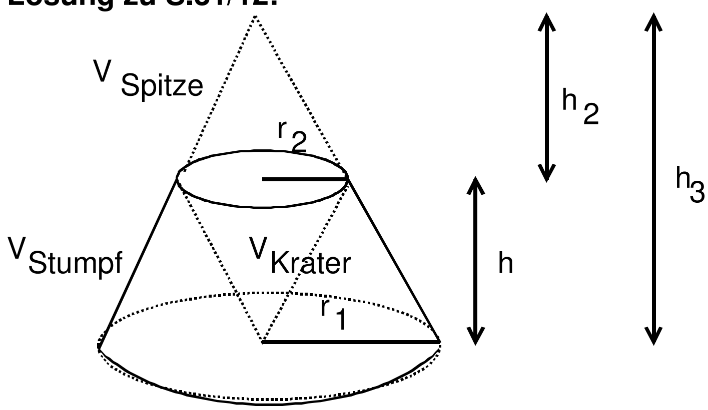
12. In einem Kegelstumpf wird wie in der Abbildung ein kegelförmiger Krater gebohrt. Berechne V und O des Restkörpers für $r_1 = 8$ cm; $r_2 = 5$ cm; $h = 6$ cm.



Lösung zu S.31/12:



<u>Berechnung von h_3</u> :

$$\frac{h_3}{h_2} = \frac{r_1}{r_2} \quad \text{(Strahlensatz)}$$

$$\frac{h_3}{h_3 - h} = \frac{r_1}{r_2}$$

$$h_3 = \frac{r_1}{r_2}(h_3 - h) = \frac{r_1 h_3}{r_2} - \frac{r_1 h}{r_2}$$

$$h_3 - \frac{r_1 h_3}{r_2} = -\frac{r_1 h}{r_2}$$

$$h_3\left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right) = -\frac{r_1 h}{r_2}$$

$$h_3 = -\frac{r_1 h}{r_2} : \left(1 - \frac{r_1}{r_2}\right) = -\frac{r_1 h}{r_2} : \frac{r_2 - r_1}{r_2} = -\frac{r_1 h}{r_2} \cdot \frac{r_2}{r_2 - r_1} = -\frac{r_1 h}{r_2 - r_1} = \frac{r_1 h}{r_1 - r_2}$$

$$= \frac{8\text{cm} \cdot 6\text{cm}}{8\text{cm} - 5\text{cm}} = 16\text{cm};$$

<u>Berechnung des Volumens:</u>

$$V_{\text{Stumpf}} = V_{h3} - V_{\text{Spitze}} - V_{\text{Krater}}$$

$$= \frac{1}{3} r_1^2 \pi \cdot h_3 - \frac{1}{3} r_2^2 \pi \cdot h_2 - \frac{1}{3} r_2^2 \pi \cdot h$$

$$= \frac{1}{3}\pi\left(r_1^2 h_3 - r_2^2 h_2 - r_2^2 h\right) = \frac{1}{3}\pi\left((8\text{cm})^2 16\text{cm} - (5\text{cm})^2 (16\text{cm} - 6\text{cm}) - (5\text{cm})^2 6\text{cm}\right)$$

$$= \frac{1}{3}\pi\left(1024\text{cm}^3 - 250\text{cm}^3 - 150\text{cm}^3\right) = \frac{1}{3}\pi 624\text{cm}^3 = 653{,}45..\text{cm}^3 \approx 653\text{cm}^3;$$

Berechnung der Mantellinien:

$$s_{h3}{}^2 = h_3{}^2 + r_l{}^2 \Rightarrow s_{h3} = \sqrt{h_3{}^2 + r_l{}^2} = \sqrt{(16\text{cm})^2 + (8\text{cm})^2} = \sqrt{320\text{cm}^2} = \sqrt{2^6 5}\text{cm} = 8\sqrt{5}\text{cm};$$

$$s_{Spitze}{}^2 = h_2{}^2 + r_2{}^2 \Rightarrow s_{Spitze} = \sqrt{h_2{}^2 + r_2{}^2} = \sqrt{(16\text{cm} - 6\text{cm})^2 + (5\text{cm})^2} = \sqrt{100\text{cm}^2 + 25\text{cm}^2} = \sqrt{5^3}\text{cm} = 5\sqrt{5}\text{cm};$$

$$s_{Krater}{}^2 = h^2 + r_2{}^2 \Rightarrow s_{Spitze} = \sqrt{h^2 + r_2{}^2} = \sqrt{(6\text{cm})^2 + (5\text{cm})^2} = \sqrt{36\text{cm}^2 + 25\text{cm}^2} = \sqrt{61}\text{cm};$$

Berechnung der Oberfläche:

$$\begin{aligned}
O &= O_{h3} - M_{Spitze} + M_{Krater} \\
&= \underbrace{r_l{}^2\pi + \pi \cdot r_l s_{h3}}_{O_{h3}} - \pi \cdot r_2 s_{Spitze} + \pi \cdot r_2 s_{Krater} \\
&= \pi\left(r_l{}^2 + r_l s_{h3} - r_2 s_{Spitze} + r_2 s_{Krater}\right) \\
&= \pi\left(64\text{cm}^2 + 8\text{cm} \cdot 8\sqrt{5\text{cm}} - 5\text{cm}5\sqrt{5}\text{cm} + 5\text{cm} \cdot \sqrt{61}\text{cm}\right) \\
&\approx 598\text{cm}^2
\end{aligned}$$