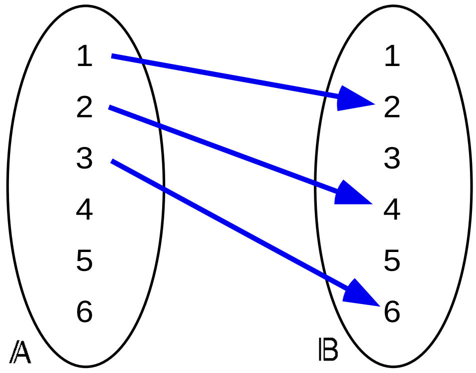
Einführung: Relationen

1. Relationen

Alle Zuordnungen der Elemente x einer ersten Menge $\mathbb{A}$ mit den Elementen y einer zweiten Menge $\mathbb{B}$ nennt man Relationen.

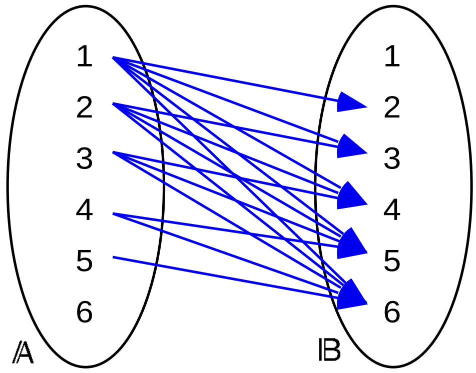
1. Beispiel: $\mathbb{A} = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
Mengendarstellung:
$\mathbb{B} = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
y ist doppelt so groß wie x

Die Pfeile gehören zur Relation.



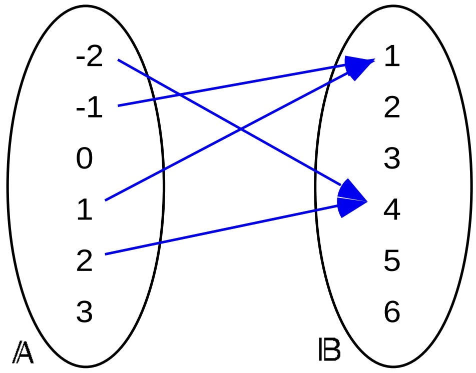
2. Beispiel: $\mathbb{A} = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
Mengendarstellung:
$\mathbb{B} = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
y ist größer als x

Die Pfeile gehören zur Relation.



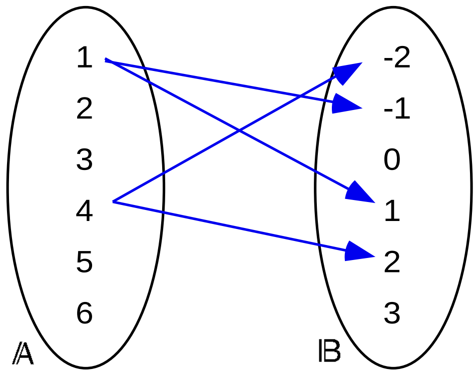
3. Beispiel: $\mathbb{A} = \{-2; -1; 0; 1; 2; 3\}$
Mengendarstellung:
$\mathbb{B} = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
y ist die Quadratzahl von x

Die Pfeile gehören zur Relation.



4. Beispiel: $\mathbb{A} = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
Mengendarstellung:
$\mathbb{B} = \{-2; -1; 0; 1; 2; 3\}$
x ist die Quadratzahl von y

Die Pfeile gehören zur Relation.



2. Weitere Begriffe und Darstellungen von Relationen

Abgesehen von den **Grundmengen** $\mathbb{A}$ und $\mathbb{B}$ wurde bei jedem Beispiel angegeben, wie x und y einander zugeordnet werden. Dies nennt man eine **Zuordnungsvorschrift**.
Die Zuordnungsvorschriften der Beispiele lassen sich mathematisch verkürzt schreiben:
1. Beispiel: $y = 2x$ 2. Beispiel: $y > x$ 3. Beispiel: $y = x^2$ 4. Beispiel: $x = y^2$

Nur die Pfeile in der Mengendarstellung gehören zur Relation. Die Anfangspunkte der Pfeile sind die x-Werte, von denen man bei der Zuordnung ausgeht.
Die Menge aller dieser x-Werte nennt man die **Definitionsmenge $\mathbb{D}$** der Relation.
Die y-Werte (d.h. Ende der Pfeile), die sich bei der Zuordnung von x ausgehend ergeben, bilden die **Wertemenge $\mathbb{W}$**.

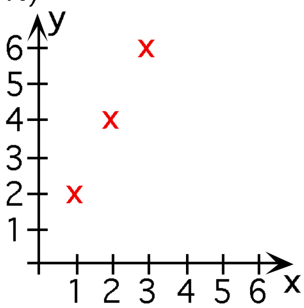
In den Beispielen:

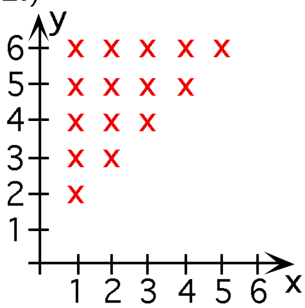
1.) $\mathbb{D} = \{1; 2; 3\}$ $\mathbb{W} = \{2; 4; 6\}$
2.) $\mathbb{D} = \{1; 2; 3; 4; 5\}$ $\mathbb{W} = \{2; 3; 4; 5; 6\}$
3.) $\mathbb{D} = \{-2; -1; 1; 2\}$ $\mathbb{W} = \{1; 4\}$
4.) $\mathbb{D} = \{1; 4\}$ $\mathbb{W} = \{-2; -1; 1; 2\}$

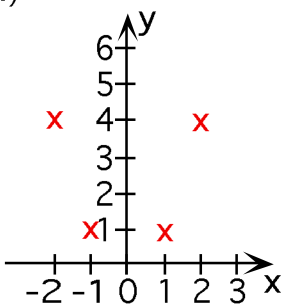
Die Elemente der Relation (d.h. die Pfeile) sind jeweils durch einen x- (= Anfang des Pfeils) und einen y-Wert (= Ende des Pfeils) festgelegt. Man schreibt sie jeweils als geordnete Zahlenpaare (x| y). Damit kann man die Relation, anstatt sie mit Mengendiagrammen darzustellen, als Mengen aufschreiben. In den Beispielen:

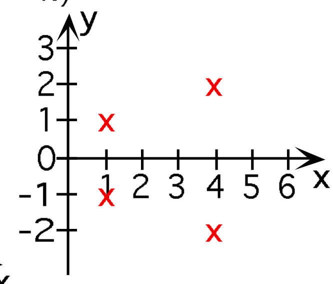
1.) {(1| 2); (2| 4); (3| 6)}
2.) {(1|2); (1|3); (1|4); (1|5); (1|6); (2|3); (2|4); (2|5); (2|6); (3|4); (3|5); (3|6); (4|5); (4|6); (5|6)}
3.) {(-2| 4); (-1| 1); (1| 1); (2| 4)}
4.) {(1| -1); (1| 1); (4| -2); (4| 2)}

Diese Zahlenpaare dienen auch als Koordinaten für die Darstellung der Relation in einem Koordinatensystem. Dies nennt man den **Graph**en einer Relation. In den Beispielen:

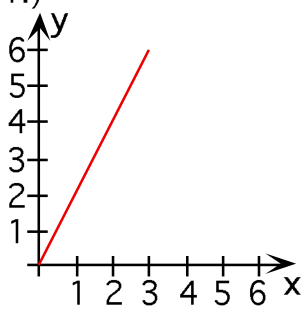
1.)


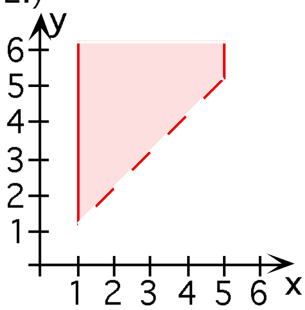
2.)


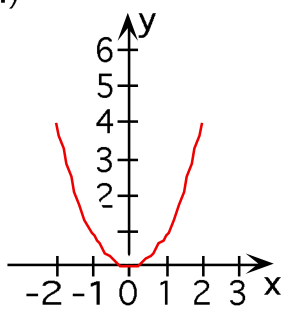
3.)


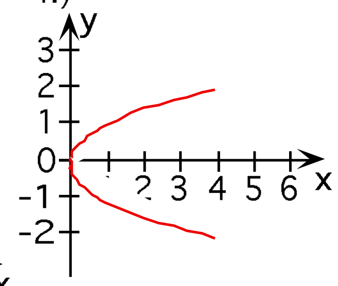
4.)


Bisher bestanden die Grundmengen aus natürlichen Zahlen. Es ist genauso möglich, alle rationalen oder reellen Zahlen (oder auch Teilmengen davon) zuzulassen. Meistens genügt es, eine Einschränkung durch die Definitionsmenge anzugeben.
Hier sind entsprechende Variationen zu den bisherigen Beispielen. $\mathbb{D}$ wird jeweils vorgegeben und $\mathbb{W}$ wird maximal möglich zugelassen (hier also keine weitere Einschränkung, auch wenn man dies zusätzlich durchführen könnte).

1.)


2.)


3.)


4.)


Definitionsmenge:

$\mathbb{D} = [0; 3]$	$\mathbb{D} = [1; 5]$	$\mathbb{D} = [-2; 2]$	$\mathbb{D} = [0; 4]$

Zuordnungsvorschrift:

$y = 2x$	$y > x$	$y = x^2$	$x = y^2$

3. Zuordnungen

Man unterscheidet bestimmte Zuordnungen. Für diese Einteilung geht man grundsätzlich zunächst von x aus:
Wenn es für jedes x in der Definitionsmenge nur ein y in der Wertemenge gibt, nennt man es eine **eindeutige Zuordnung**. Dies trifft auf die Beispiele 1. und 3. zu.
Wenn zusätzlich gilt, daß es auch für jedes y der Wertemenge nur ein x in der Definitionsmenge gibt, dann nennt man es eine **ein-eindeutige Zuordnung**. Dies trifft auf das erste Beispiel zu. Beispiele 2. und 4. sind in diesem Sinne keine besonderen Zuordnungen.

Vorgehen bei der Analyse:

1. Für jeden x-Wert entlang einer Parallelen zur y-Achse schauen.
   Wenn es auf jeder solchen Parallele nicht mehr als einen Punkt der Relation gibt, ist es eine eindeutige Zuordnung.
2. Nur bei eindeutigen Zuordnungen schaut man zusätzlich auch für jeden y-Wert entlang einer Parallelen zur x-Achse.
   Wenn es auf jeder solchen Parallelen auch nicht mehr als einen Punkt gibt, ist es eine ein-eindeutige Zuordnung.