Einführung: Funktionen

1. Funktionen

Jede Relation mit einer eindeutigen Zuordnung heißt Funktion.

Also sind nur die Beispiele 1 und 3 von der „Einführung: Relationen“ Funktionen, wobei das erste Beispiel auf Grund der Ein-eindeutigkeit der Zuordnung eine **ein-eindeutige Funktion** ist.

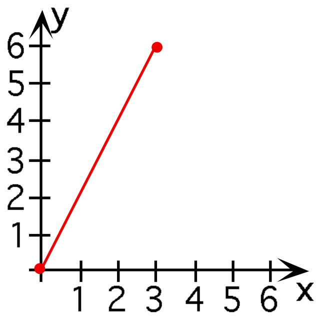
Damit ist eine Funktion also nur eine bestimmte Form einer Relation, so dass alles bisher Gesagte auch für die Funktionen gilt.

Grundgedanke für die Funktionen ist weiterhin, dass man immer von den x-Werten der Definitionsmenge ausgeht und die dazugehörigen y-Werte der Wertemenge mit Hilfe der Zuordnungsvorschrift bestimmt.

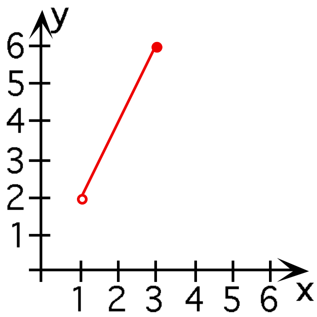
Damit entscheiden also die Zuordnungsvorschrift und die Definitionsmenge, welche Punkte alles zur Funktion gehören.

Hier wird jetzt mit Variationen zum 1. Beispiel gezeigt, dass Funktionen mit selber Zuordnungsvorschrift aufgrund der Definitionsmenge unterschiedlich sein können.

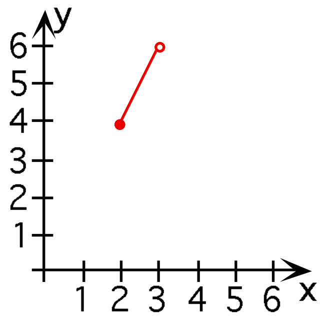
Für alle diese Beispiele ist die Zuordnungsvorschrift: $y = 2x$.



$\mathbb{D} = [0; 3]$



$\mathbb{D} =]1; 3]$



$\mathbb{D} = [2; 3[$

Hinweis: ein ausgefüllter Punkt heißt, er gehört dazu. Ein Kringel bedeutet, dass alle Punkte bis dahin dazugehören, der Randpunkt aber nicht mehr.

Wichtig: Für eine Funktion müssen also immer Zuordnungsvorschrift und Definitionsmenge angegeben werden. Wenn die Angabe zur Definitionsmenge fehlt, ist die maximal mögliche Definitionsmenge zu verwenden, d.h. alle x-Werte, die sich rechentechnisch in der Zuordnungsvorschrift einsetzen lassen.

Beispiele:

a) Bei der Zuordnungsvorschrift $y = \frac{1}{x}$ ist die maximale Definitionsmenge $\mathbb{D}_{max} = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, da man für x hier keine null einsetzen kann, da dann der Nenner 0 wäre.

b) Bei der Zuordnungsvorschrift $y = \frac{x+1}{x-1}$ ist die maximale Definitionsmenge $\mathbb{D}_{max} = \mathbb{Q} \setminus \{1\}$, da für $x = 1$ der Nenner 0 wäre.

. . .

2. Zuordnungsvorschriften und Schreibweisen

Da eine Funktion immer eine eindeutige Zuordnung ist, lässt sich für jedes x aus der Definitionsmenge immer genau ein y berechnen. Dafür wird die Zuordnungsvorschrift üblicherweise nach y aufgelöst.
Beispiel: Gegeben ist die Zuordnungsvorschrift: $2x = y - 3$.
Diese wird nach y aufgelöst. Man bekommt:

$y = 2x + 3$.   Dies ist eine einfache Form (vgl. unten) der **Funktionsgleichung**.

Für jedes x bekommt man also das dazugehörige y, indem man den Ausdruck $2x + 3$ dafür berechnet. Der Ausdruck $2x + 3$ heißt **Funktionsterm**.

Funktionen werden mit kleinen Buchstaben, meistens mit f, abgekürzt.
Bei einer Funktion wird immer jedem x ein y, welches durch den Funktionsterm berechnet wird, zugeordnet. Dies verdeutlicht folgende Schreibweise:

$\mathbf{f\colon\ x \mapsto 2x + 3}$ (Dies bedeutet: die Funktion f ordnet jedem x den Wert $2x + 3$ zu.)

In diesem Beispiel werden z.B. folgende Werte zugeordnet:
dem x-Wert 1 den y-Wert 5 (da $2\cdot 1 + 3 = 5$)
dem x-Wert 2 den y-Wert 7 (da $2\cdot 2 + 3 = 7$)
dem x-Wert 3 den y-Wert 9 (da $2\cdot 3 + 3 = 9$)

Möchte man verdeutlichen, zu welchem x-Wert ein bestimmter y-Wert gehört, könnte man dies mit Indizes darstellen, also:
$y_{x=1} = 5$ $y_{x=2} = 7$ $y_{x=3} = 9$

Dies ist aber nicht üblich. Stattdessen wählt man eine andere Schreibweise, der man nicht nur ansieht, welches x gerade verwendet wird, sondern auch, mit welcher Funktion man arbeitet:
Für y schreibt man f(x).

Im Beispiel folgt: $f(1) = 5$ $(= 2\cdot 1 + 3)$
$f(2) = 7$ $(= 2\cdot 2 + 3)$
$f(3) = 9$ $(= 2\cdot 3 + 3)$

und allgemein: $\mathbf{f(x) = 2\cdot x + 3}$ Dies ist die genauere Form der **Funktionsgleichung.**

f(x) entspricht also dem Funktionsterm. Damit kann man die Funktion auch schreiben als:

$\mathbf{f\colon\ x \mapsto f(x)}$ (Dies bedeutet: die Funktion f ordnet jedem x den Wert (also das y) zu, den man durch Berechnung des Funktionsterms f(x) für diesen x-Wert bekommt.)

Wenn man für einen x-Wert den dazugehörigen y-Wert berechnet, nennt man diesen den **Funktionswert an der Stelle x**.

Im Beispiel: $f(1) = 5$ bedeutet: der Funktionswert an der Stelle 1 ist 5.
$f(2) = 7$ bedeutet: der Funktionswert an der Stelle 2 ist 7.
$f(3) = 9$ bedeutet: der Funktionswert an der Stelle 3 ist 9.

Beachte: eine <u>Stelle</u> ist immer ein <u>x-Wert</u>, ein <u>Funktionswert</u> ist immer ein <u>y-Wert</u>.

Beispiel: eine **Null<u>stelle</u>** ist der <u>x-Wert</u> (also kein Punkt), für den der Funktionswert null ist.
Im Beispiel ist die Nullstelle $x = -1{,}5$, da $f(-1{,}5) = 2\cdot(-1{,}5) + 3 = 0$.

Dagegen ist ein Schnittpunkt der Funktion mit der x-Achse ein Punkt mit zwei Koordinaten, in diesem Beispiel der Punkt $(-1{,}5;\ 0)$.