II Musterlösung

$$f_k(x) = \frac{x^2}{1-kx^2} \; ; \; k \in \mathbb{R}$$

1a) NR (Wann wird der Nenner 0)

$1 - kx^2 = 0$

$kx^2 = 1$

1. Fall: $k > 0$

$x^2 = \frac{1}{k}$

$x = \pm \frac{1}{\sqrt{k}}$ d.h. $\mathbb{D}_k = \mathbb{R} \setminus \{ \frac{1}{\sqrt{k}} ; -\frac{1}{\sqrt{k}} \}$

2. Fall: $k < 0$

$x^2 = \frac{1}{k} < 0$

unlösbar d.h. $\mathbb{D}_k = \mathbb{R}$

3. Fall: $k = 0$ (nicht verlangt!)

$0 \cdot x^2 = 1$

unlösbar d.h. $\mathbb{D}_k = \mathbb{R}$

$$\lim_{x \to \pm\infty} f_k(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x^2}{1-kx^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{\underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\to 0} - k} = \frac{1}{-k} \text{ für } k \neq 0$$

Asymptoten für $k \neq 0$: $y = -\frac{1}{k}$

für $k > 0$: $x = \frac{1}{\sqrt{k}}$; $x = -\frac{1}{\sqrt{k}}$; (vgl. oben)

1b) $f_k'(x) = \dfrac{2x(1-kx^2) - x^2(-2kx)}{(1-kx^2)^2}$

$= \dfrac{2x - 2kx^3 + 2kx^3}{(1-kx^2)^2} = \dfrac{2x}{(1-kx^2)^2}$;

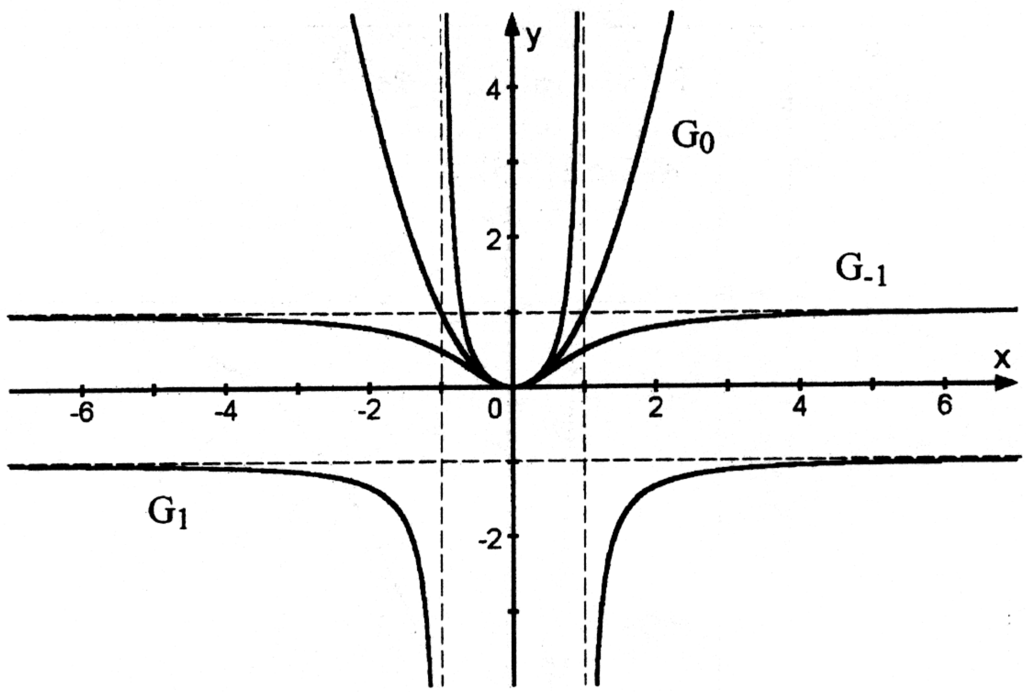
$f_k'(x) = 0 \Rightarrow x = 0$

	$x<0$	$x=0$	$x>0$
$f_k'(x)$	<0	$=0$	>0
		TP	

Alternativ $f_k''(0) = 2 > 0$

$f_k(0) = 0$; TP(0|0) für alle G_k

1c)



1d) Für $k<0$: $y = -\frac{1}{k}$ waagrechte Asymptote

$$\lim_{k \to -\infty} \underbrace{\left(-\frac{1}{k}\right)}_{+0}$$, d.h. die Asymptote nähert sich von oben der x-Achse.

$$\lim_{k \to 0} -\left(\frac{1}{\underbrace{k}_{-0}}\right) = \infty$$ $\to -\infty$, d.h. die Asymptote entfernt sich von der x-Achse nach oben.

1e) $$f_k(1) = \frac{1^2}{1-k\cdot 1^2} = 2$$

$$1 = 2-2k$$
$$2k = 1$$
$$k = \frac{1}{2};$$ damit verläuft G_k durch P.

$$f_k(x) = \frac{x^2}{1-kx^2} = y$$
$$x^2 = y - kx^2y$$
$$kx^2y = y - x^2$$
$$k = \frac{y-x^2}{x^2y} \quad \text{für } x \neq 0 \wedge y \neq 0$$

Zu jedem x und y mit $x \neq 0$ und $y \neq 0$ gibt es genau ein k.

2. $v(t) = 7t \cdot e^{-0{,}1t}$ für $0 \leq t \leq 10$

a) $$s(10) = \int_0^{10} v(t)\,dt = \int_0^{10} \underbrace{7t}_{u} \cdot \underbrace{e^{-0{,}1t}}_{v'}\,dt$$

$$= \left[7t \cdot \frac{e^{-0{,}1t}}{-0{,}1}\right]_0^{10} - \int_0^{10} 7 \cdot \frac{e^{-0{,}1t}}{-0{,}1}\,dt$$

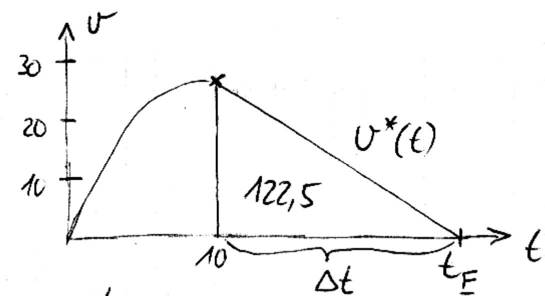
$$= -\frac{700}{e} + 70 \cdot \int_0^{10} e^{-0,1t}\,dt$$

$$= -\frac{700}{e} + 70 \cdot \left[\frac{e^{-0,1t}}{-0,1} \right]_0^{10}$$

$$= -\frac{700}{e} + 70 \cdot \left(\frac{e^{-1}}{-0,1} + 10 \right)$$

$$= -\frac{700}{e} - \frac{700}{e} + 700 = -\frac{1400}{e} + 700 \approx 185;$$

b) Skizze:



$$\Delta(10 \to t_E) = \int_{10}^{t_E} v^*(t)\,dt = \frac{1}{2}\Delta t \cdot v(10) = 122,5$$

$$\Delta t = \frac{2 \cdot 122,5}{v(10)} = \frac{2 \cdot 122,5}{70 \cdot e^{-1}} = \frac{245}{70} e = 3,5e$$

$$m = -\frac{v(10)}{\Delta t} = -\frac{70 \cdot e^{-1}}{3,5e} = -\frac{20}{e^2};$$