Lösungen zu Aufgaben zum Skalarprodukt

55. Satz des Thales: Ein Dreieck ABC hat genau dann bei C einen rechten Winkel, wenn die Ecke C auf dem Halbkreis über [AB] liegt.
„genau dann" bedeutet: es gelten Satz und Kehrsatz.

a) Satz: Ein Dreieck ABC hat bei C einen rechten Winkel, wenn die Ecke C auf dem Halbkreis über [AB] liegt.
Vor.: $|\vec{c}| = |\vec{r}|$ Beh.: $\vec{a} \perp \vec{b}$
Bew.: $\vec{a} \circ \vec{b} = (\vec{r} + \vec{c}) \circ (-\vec{r} + \vec{c}) = -r^2 + \vec{r} \circ \vec{c} - \vec{r} \circ \vec{c} + c^2 = c^2 - r^2 = 0$ (da $|\vec{c}| = |\vec{r}|$) $\Rightarrow \vec{a} \perp \vec{b}$

b) Kehrsatz: Wenn ein Dreieck ABC bei C einen rechten Winkel hat, liegt die Ecke C auf dem Halbkreis über [AB].
Vor.: $\vec{a} \perp \vec{b}$ Beh.: $|\vec{c}| = |\vec{r}|$
Bew.: $\vec{a} \circ \vec{b} = 0 \Rightarrow c^2 - r^2 = 0 \Rightarrow |\vec{c}| = |\vec{r}|$

56. Vor.: $\vec{a} + \vec{b} \perp \vec{a} - \vec{b}$ Beh.: $|\vec{a}| = |\vec{b}|$

Bew.: $(\vec{a} + \vec{b}) \circ (\vec{a} - \vec{b}) = 0 \Leftrightarrow a^2 - \vec{a} \circ \vec{b} + \vec{a} \circ \vec{b} - b^2 = 0 \Leftrightarrow a^2 = b^2 \Leftrightarrow |\vec{a}| = |\vec{b}|$

58. a) $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix} 3\lambda \\ 1-\lambda \\ 3-2\lambda \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+3\lambda \\ -\lambda \\ 4-2\lambda \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AB} \perp \overrightarrow{AC} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2+3\lambda \\ -\lambda \\ 4-2\lambda \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 6 - 9\lambda - \lambda + 8 - 4\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1$

Der gesuchte Punkt ist: $\vec{C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ C(3 | 0 | 1)

b) $\vec{S}_k = \begin{pmatrix} -1-2k \\ 2+k \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + k \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Dies ist eine Geradengleichung mit Richtungsvektor

parallel zu $\overrightarrow{BC} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = -2 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Zur Bestimmung des Abstands fällt man ein Lot von einer Geraden auf die andere, z.B. vom Punkt B auf die Gerade s und bestimmt den Fußpunkt F des Lots. Der Abstand der Geraden ist dann $\overline{BF} = |\overrightarrow{BF}|$.

Für F gilt: $\overrightarrow{BF} \perp \vec{u}_s$ und $F \in s \Rightarrow \overrightarrow{BF} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$ und $\vec{F} = \begin{pmatrix} -1-2k \\ 2+k \\ 3 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \left[\begin{pmatrix} -1-2k \\ 2+k \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -2k \\ k \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \Rightarrow 4k + k = 0 \Leftrightarrow k = 0$

$\Rightarrow \overrightarrow{BF} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \Rightarrow |\overrightarrow{BF}| = 2$

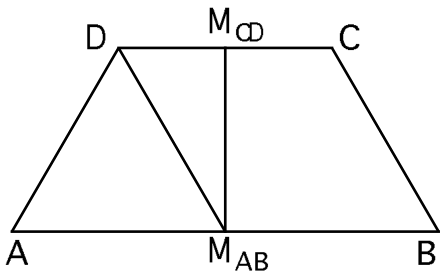
59. a) Für den Mittelpunkt M_{CD} der Seite [CD] gilt: $M_{CD} \in CD$ und $\overrightarrow{M_{AB}M_{CD}} \perp \overrightarrow{AB}$

$$\vec{M}_{CD} = \vec{D} + \lambda^* \cdot \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda^* \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-\lambda \\ -1+\lambda \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\vec{M}_{AB} = \tfrac{1}{2} \cdot \left(\vec{A} + \vec{B}\right) = \tfrac{1}{2} \cdot \left[\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{M_{AB}M_{CD}} \circ \tfrac{1}{4} \cdot \overrightarrow{AB} = 0 \iff \left[\begin{pmatrix} 2-\lambda \\ -1+\lambda \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right] \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{pmatrix} -\lambda \\ -2+\lambda \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \lambda - 2 + \lambda = 0 \iff \lambda = 1 \Rightarrow \vec{M}_{CD} = \begin{pmatrix} 2-1 \\ -1+1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$



$$\vec{C} = \vec{M}_{CD} + \overrightarrow{DM_{CD}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \iff C(0 \mid 1 \mid 3)$$

b) $$\left|\overrightarrow{AM_{AB}}\right| = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\left|\overrightarrow{BM_{AB}}\right| = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\left|\overrightarrow{CM_{AB}}\right| = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\left|\overrightarrow{DM_{AB}}\right| = \left|\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

Also liegt M_{AB} von allen Eckpunkten gleich weit entfernt.

c) $$\cos\alpha = \left|\frac{\overrightarrow{AB} \circ \overrightarrow{AD}}{\left|\overrightarrow{AB}\right| \cdot \left|\overrightarrow{AD}\right|}\right| = \left|\frac{\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}\right| \cdot \left|\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right|}\right| = \left|\frac{8}{4\sqrt{2} \cdot 2\sqrt{2}}\right| = \tfrac{1}{2} \Rightarrow \alpha = 60^\circ$$

$$\beta = \alpha = 60^\circ;\ \gamma = 180^\circ - \beta = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ;\ \delta = \gamma = 120^\circ$$

d) $$h = \left|\overrightarrow{M_{AB}M_{CD}}\right| = \left|\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = \sqrt{6}$$

e) $$\left|\overrightarrow{AD}\right| = \left|\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = 2\sqrt{2};\quad \left|\overrightarrow{M_{AB}D}\right| = \left|\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}\right| = 2\sqrt{2}$$

Da diese Richtungsvektoren denselben Betrag haben, ist ein Normieren für die Bestimmung der Winkelhalbierenden nicht nötig. Richtungsvektoren der beiden Winkelhalbierenden sind:

$$\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{M_{AB}D} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},\ \text{wähle } \vec{u}_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{M_{AB}D} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \text{wähle } \vec{u}_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{u}_1 \circ \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 4 - 4 + 0 = 0 \Rightarrow \vec{u}_1 \perp \overrightarrow{AB};\quad \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix} = 4 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \vec{u}_2 \parallel \overrightarrow{AB}$$