Lösung zur 2. Schulaufg., 2. Sem., LK Mathem., K12, 18.6.04

Analytische Geometrie

1. a) $\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\4\\7\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}-3\\2\\6\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left|\begin{matrix}1=-2-3\lambda\\2=4+2\lambda\\1=7+6\lambda\end{matrix}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{matrix}\lambda=-1\\\lambda=-1\\\lambda=-1\end{matrix}\right| \quad\Rightarrow\quad A\in g$

b) h: $\vec{X}=\vec{B}+\lambda\cdot\overrightarrow{BC}=\begin{pmatrix}0\\-2\\10\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}3-0\\-4+2\\4-10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-2\\10\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}3\\-2\\-6\end{pmatrix}; \qquad \vec{u}_g=-\vec{u}_h \quad\Rightarrow\quad g \parallel h$

$B\in g?\quad \begin{pmatrix}0\\-2\\10\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\4\\7\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}-3\\2\\6\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left|\begin{matrix}0=-2-3\lambda\\-2=4+2\lambda\\10=7+6\lambda\end{matrix}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{matrix}\lambda=-\frac{2}{3}\\\lambda=-3\\\lambda=\frac{1}{2}\end{matrix}\right|$; Widerspruch $\quad\Rightarrow\quad B\notin g$

$\Rightarrow\quad g\neq h \quad\Rightarrow$ g und h sind echt parallel.

c) E: $\vec{X}=\vec{B}+\lambda\cdot\vec{u}_g+\mu\cdot\overrightarrow{A_gB}=\begin{pmatrix}0\\-2\\10\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}-3\\2\\6\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}0+2\\-2-4\\10-7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-2\\10\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}-3\\2\\6\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}2\\-6\\3\end{pmatrix}$

$\vec{u}_E\times\vec{v}_E=\begin{pmatrix}-3\\2\\6\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}2\\-6\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6+36\\12+9\\18-4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}42\\21\\14\end{pmatrix}=7\cdot\begin{pmatrix}6\\3\\2\end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix}6\\3\\2\end{pmatrix}\circ\left[\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0\\-2\\10\end{pmatrix}\right]=0 \quad\Leftrightarrow\quad 6x_1+3x_2+2x_3-0+6-20=0 \quad\Leftrightarrow\quad 6x_1+3x_2+2x_3-14=0$

d) F in E: $6(-2+\lambda)+3(2+2\mu)+2(-10-\lambda-3\mu)-14=0 \quad\Leftrightarrow\quad 4\lambda-40=0 \quad\Leftrightarrow \lambda=10$

in F: s: $\vec{X}=\begin{pmatrix}-2\\2\\-10\end{pmatrix}+10\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}8\\2\\-20\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}0\\2\\-3\end{pmatrix}$; E, F schneiden sich in s.

e) x_1x_3-Ebene: $x_2=0$; h einsetzen: $-2-2\lambda=0 \Leftrightarrow \lambda=-1$; in h einsetzen:

$\vec{T}=\begin{pmatrix}0\\-2\\10\end{pmatrix}-1\cdot\begin{pmatrix}3\\-2\\-6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\0\\16\end{pmatrix} \qquad\Rightarrow\quad T(-3\mid 0\mid 16)$

Teilverh. des Punktes T für [BC]: $\overrightarrow{BT}=\tau\cdot\overrightarrow{TC} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix}-3-0\\0+2\\16-10\end{pmatrix}=\tau\cdot\begin{pmatrix}3+3\\-4-0\\4-16\end{pmatrix} \quad\Leftrightarrow\quad \begin{pmatrix}-3\\2\\6\end{pmatrix}=\tau\cdot\begin{pmatrix}6\\-4\\-12\end{pmatrix}$

$\Rightarrow\quad \tau=-\frac{1}{2} \quad\Rightarrow$ T ist äußerer Teilpunkt auf der Seite von B, d.h. B liegt in der Mitte.

2. a) x_1-Achse
   b) Ebene aufgespannt durch die 1. Winkelhalbierende der x_1x_2-Ebene und die x_3-Achse

Analysis

3. a) $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{e^x}=0 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x}{e^x}\right)^2=0 \quad\Rightarrow\quad \lim\limits_{x\to\infty}2\cdot\frac{x+1}{e^{2x}}=0$, da $0<2\cdot\frac{x+1}{e^{2x}}<\frac{x^2}{e^{2x}}=\left(\frac{x}{e^x}\right)^2$ für große x

$x\to-\infty:\quad \left.\begin{matrix}\text{Zähler}\to-\infty\\\text{Nenner}\to 0\text{, pos.}\end{matrix}\right\} \quad\Rightarrow\quad \lim\limits_{x\to-\infty}2\cdot\frac{x+1}{e^{2x}}=-\infty$

b) Mit der Quotientenregel oder mit $f(x)=2(x+1)\cdot e^{-2x}$ und der Produktregel:

$f'(x)=2\left[1\cdot e^{-2x}+(x+1)\cdot e^{-2x}\cdot(-2)\right]=2\,e^{-2x}\cdot[1-2x-2]=-2(1+2x)\cdot e^{-2x}=-2\cdot\frac{1+2x}{e^{2x}}$

$f'(x)=0 \quad\Rightarrow\quad 1+2x=0 \quad\Leftrightarrow\quad x=-\frac{1}{2}; \qquad f\left(-\frac{1}{2}\right)=2\cdot\frac{-\frac{1}{2}+1}{e^{2\cdot(-0,5)}}=e;$

$f'(x)<0$ für $x>-\frac{1}{2}$ und $f'(x)>0$ für $x<-\frac{1}{2}$; $\qquad\Rightarrow\quad HOP\left(-\frac{1}{2}\,\middle|\,e\right)$

4. einfacher in der Form: $\frac{e^{\frac{1}{x}}}{1-e^{\frac{1}{x}}}=\frac{e^{\frac{1}{x}}}{1-e^{\frac{1}{x}}}\cdot\frac{e^{-\frac{1}{x}}}{e^{-\frac{1}{x}}}=\frac{1}{e^{-\frac{1}{x}}-1}$, also Zähler = 1

$x \to \infty$: $\quad -\frac{1}{x} \to 0 \text{ (neg.)} \Rightarrow e^{-\frac{1}{x}} \to 1 \; (<1) \Rightarrow \text{Nenner} \to 0 \text{ (neg.)} \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{1-e^{\frac{1}{x}}} = -\infty$

$x \overset{>}{\to} 0$: $\quad -\frac{1}{x} \to -\infty \Rightarrow e^{-\frac{1}{x}} \to 0 \Rightarrow \text{Nenner} \to -1 \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{1-e^{\frac{1}{x}}} = \frac{1}{-1} = -1$

$x \overset{<}{\to} 0$. $\quad -\frac{1}{x} \to \infty \Rightarrow e^{-\frac{1}{x}} \to \infty \Rightarrow \text{Nenner} \to \infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{1-e^{\frac{1}{x}}} = 0$

5. a) Für den Ansatz $I(x) = I_0 \cdot e^{-kx}$ ist gegeben:

$30\% = 100\% \cdot e^{-k\cdot 1m} \Leftrightarrow \ln 0,3 = -k \cdot 1m \Leftrightarrow k = -\ln 0,3 \cdot \frac{1}{m} \approx 1,2\frac{1}{m}$

$I(10m) = 100\% \cdot e^{\ln 0,3 \cdot \frac{1}{m} \cdot 10m} \approx 6,1 \cdot 10^{-4}\%$

b) $50\% = 100\% \cdot e^{\ln 0,3 \cdot \frac{1}{m} \cdot x} \Leftrightarrow \ln 0,5 = \ln 0,3 \cdot \frac{1}{m} \cdot x \Leftrightarrow x = \frac{\ln 0,5}{\ln 0,3} m \approx 0,578 m = 57,8 cm$

Stochastik

6. a) geg.: $P(1) = P(2) = P(3) = \frac{1}{3}$; $P_1(A) = P_2(A) = 0,15$; $P_3(A) = 0,05$ ges.: $P_A(3)$

$$P_A(3) = \frac{P(3)\cdot P_3(A)}{P(1)\cdot P_1(A) + P(2)\cdot P_2(A) + P(3)\cdot P_3(A)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot 0,05}{\frac{1}{3}\cdot 0,15 + \frac{1}{3}\cdot 0,15 + \frac{1}{3}\cdot 0,05}$$

$$= \frac{0,05}{0,35} = \frac{1}{7} \; (\approx 14,3\%)$$

b) ges.: $P_{\overline{A}}(2)$

$$P_{\overline{A}}(2) = \frac{P(2)\cdot P_2(\overline{A})}{P(1)\cdot P_1(\overline{A}) + P(2)\cdot P_2(\overline{A}) + P(3)\cdot P_3(\overline{A})} = \frac{\frac{1}{3}\cdot 0,85}{\frac{1}{3}\cdot 0,85 + \frac{1}{3}\cdot 0,85 + \frac{1}{3}\cdot 0,95}$$

$$= \frac{0,85}{2,65} = \frac{17}{53} \; (\approx 32,1\%)$$

c) geg.: $P(1) = \frac{1}{2}$; $P(2) = P(3) = \frac{1}{4}$; $P_1(A) = 0,1$; $P_2(A) = 0,15$; $P_3(A) = 0,05$ ges.: $P_A(1)$

$$P_A(1) = \frac{P(1)\cdot P_1(A)}{P(1)\cdot P_1(A) + P(2)\cdot P_2(A) + P(3)\cdot P_3(A)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot 0,1}{\frac{1}{2}\cdot 0,1 + \frac{1}{4}\cdot 0,15 + \frac{1}{4}\cdot 0,05}$$

$$= \frac{0,05}{0,1} = \frac{1}{2} \; (= 50\%)$$