Lösungen zur 2. Schulaufg. a. d. Math., LK, K12, 1. Sem., 9.1.04

Analysis

1. $W = \int_0^{0,1m} F(x)\,dx = \int_0^{0,1m} D x\,dx = D \cdot \int_0^{0,1m} x\,dx = D \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot x^2\right]_0^{0,1m} = 9\frac{N}{m} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot (0{,}1m)^2 - 0\right) = 0{,}045\,Nm = 45\,mJ$

2. Nullstellen: $f(x) = 12x^3 + 12x^2 - 72x = 12x\,(x^2 + x - 6) = 12x\,(x + 3)\,(x - 2) \Rightarrow x_1 = -3;\ x_2 = 0;\ x_3 = 2$

$$A = \left|\int_{-3}^{0} f(x)\,dx\right| + \left|\int_0^2 f(x)\,dx\right| = \left|\left[3x^4 + 4x^3 - 36x^2\right]_{-3}^{0}\right| + \left|\left[3x^4 + 4x^3 - 36x^2\right]_0^2\right|$$

$$= \left|0 - (243 - 108 - 324)\right| + \left|(48 + 32 - 144) - 0\right| = |189| + |-64| = 253$$

Analytische Geometrie

3. a) $\begin{pmatrix}2\\0\\-1\end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix}3\\2\\-1\end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix}-2\\-2\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 2 = \lambda_1 + 3\lambda_2 - 2\lambda_3 \\ 0 = \lambda_1 + 2\lambda_2 - 2\lambda_3 \\ -1 = \quad - \quad \lambda_2 + \lambda_3 \end{array}\right| \begin{array}{ll} \text{I} & \text{I} - \text{II} \\ \text{II} & \text{I}', \text{III}' \text{ in II} \\ \text{III} & \text{I}' \text{ in III} \end{array} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} \lambda_2 = 2 \\ \lambda_1 = -2 \\ \lambda_3 = 1 \end{array}\right| \begin{array}{l} \text{I}' \\ \text{II}' \\ \text{III}' \end{array}$

$\Rightarrow \vec{a} = -2 \cdot \vec{a}_1 + 2 \cdot \vec{a}_2 + \vec{a}_3$

b) Ja, da sich ein Vektor ($\vec{a}$) durch die anderen darstellen lässt.

4. $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} a = 2\lambda_1 \\ b = 3\lambda_1 + \lambda_2 \\ c = \lambda_1 + \lambda_2 \end{array}\right| \begin{array}{ll} \text{I} & \\ \text{II} & \text{I}, \text{III}' \text{ in II} \\ \text{III} & \text{I in III} \end{array} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{c} \lambda_1 = \frac{1}{2}a \\ b = 3 \cdot \frac{1}{2}a + c - \frac{1}{2}a \\ \lambda_2 = c - \frac{1}{2}a \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ \text{II}' \\ \text{III}' \end{array}$

Aus II‘ folgt die gesuchte Bedingung: $b = a + c$

5. Untersuchung der linearen Unabhängigkeit: $\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix}0\\3\\-2\end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix}3\\0\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow$

$\left|\begin{array}{l} \lambda_1 \qquad + 3\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 \qquad = 0 \\ \quad - 2\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \end{array}\right| \begin{array}{ll} \text{I} & \\ \text{II} & \text{II} - 2 \cdot \text{I} \\ \text{III} & \end{array} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} \lambda_1 \qquad + 3\lambda_3 = 0 \\ 3\lambda_2 - 6\lambda_3 = 0 \\ -2\lambda_2 + 4\lambda_3 = 0 \end{array}\right| \begin{array}{ll} & \\ \text{II}' & :3 \\ & :(-2) \end{array} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} \lambda_1 \quad + 3\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \end{array}\right|$

Da II‘ und III gleich sind, gibt es nicht-triviale Lösungen, z.B.: $\lambda_1 = -3$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = 1$
$\Rightarrow$ die Vektoren sind linear Abhängig $\Rightarrow$ der von ihnen aufgespannte Vektoren hat höchstens Dimension 2 $\Rightarrow$ er ist nicht der dreidimensionale geometrische Vektorraum.

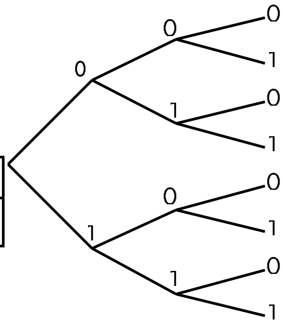
6. a) $\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} \lambda_1 + 2\lambda_2 \qquad = 0 \\ -3\lambda_1 - 3\lambda_2 + 3\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 \qquad = 0 \end{array}\right| \begin{array}{ll} \text{I} & 2 \cdot \text{I} - \text{III} \\ \text{II} & \text{I}', \text{III}' \text{ in II} \\ \text{III} & \text{I}' \text{ in III} \end{array} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} \lambda_2 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \end{array}\right| \begin{array}{l} \text{I}' \\ \text{II}' \\ \text{III}' \end{array}$

Die Vektoren $\vec{b}_1$, $\vec{b}_2$ und $\vec{b}_3$ sind also linear unabhängig. Der von ihnen aufgespannte Vektorraum muss also die Dimension 3 haben und ist deshalb der gesamte dreidimensionale Vektorraum.

b) $\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix} = \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\-3\\2\end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix}0\\3\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} -2 = \lambda_1 + 2\lambda_2 \\ 1 = -3\lambda_1 - 3\lambda_2 + 3\lambda_3 \\ 2 = 2\lambda_1 + \lambda_2 \end{array}\right| \begin{array}{ll} \text{I} & 2 \cdot \text{I} - \text{III} \\ \text{II} & \text{I}', \text{III}' \text{ in II} \\ \text{III} & \text{I}' \text{ in III} \end{array} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} \lambda_2 = -2 \\ \lambda_3 = \frac{1}{3} \\ \lambda_1 = 2 \end{array}\right| \begin{array}{l} \text{I}' \\ \text{II}' \\ \text{III}' \end{array}$

$\Rightarrow \vec{a} = 2 \cdot \vec{b}_1 - 2 \cdot \vec{b}_2 + \frac{1}{3} \cdot \vec{b}_3$

Stochastik



7. a) $\Omega = \{(0;0;0);(0;0;1);(0;1;0);(0;1;1);(1;0;0);(1;0;1);(1;1;0);(1;1;1)\}$

b) Die restlichen Elementarereignisse haben zusammen 96%. In ihnen taucht 12-mal die 1 auf, d.h. pro 1 bekommt man eine Wahrscheinlichkeit von 96% : 12 = 8%. Damit folgt:

ω_i	(0;0;0)	(0;0;1)	(0;1;0)	(0;1;1)	(1;0;0)	(1;0;1)	(1;1;0)	(1;1;1)
$P(\omega_i)$	4%	8%	8%	16%	8%	16%	16%	24%

8. a) $|\Omega| = \binom{32}{10} = \frac{32!}{22! \cdot 10!} = 64.512.240$ b) $|\Omega| = \binom{32}{10} \cdot \binom{22}{10} \cdot \binom{12}{10} \cdot \binom{2}{2} \approx 2{,}75 \cdot 10^{15}$

9. $|\Omega| = 5^3 = 125$; $|A| = 5 \cdot 4 \cdot 3 = 60 \Rightarrow P(A) = \frac{60}{125} = \frac{12}{25} = 48\%$

B besteht aus allen Permutationen von (5;5;1), (5;4;2), (5;3;3) und (4;4;3)

$\Rightarrow |B| = 3 + 3! + 3 + 3 = 15 \Rightarrow P(B) = \frac{15}{125} = \frac{3}{25} = 12\%$

C besteht aus (3;3;3) und allen Permutationen von (5;5;x) mit $x \neq 3$

$\Rightarrow |C| = 1 + 4 \cdot 3 = 13 \Rightarrow P(B) = \frac{13}{125} = 10{,}4\%$

$\overline{D} = \{(3;3;3)\}$; $P(D) = 1 - P(\overline{D}) = 1 - \frac{1}{125} = \frac{124}{125} = 99{,}2\%$