Lösung zur 1. Schulaufgabe, 2. Semester, LK Mathematik, K12, 2.4.04

Infinitesimalrechnung

1. a) $f_a(-x) = \frac{1}{9}(-x)^3 - (-x)\cdot(1-a^2) = -\frac{1}{9}x^3 + x\cdot(1-a^2) = -\left[\frac{1}{9}x^3 - x\cdot(1-a^2)\right] = -f_a(x)$

$\Rightarrow$ alle Funktionen der Schar sind punktsymmetrisch zum Ursprung.

b) $f_a(x) = \frac{1}{9}x^3 - x\cdot(1-a^2) = \frac{1}{9}x\left[x^2 - 9\cdot(1-a^2)\right] = 0 \Rightarrow x_1 = 3\sqrt{1-a^2}$; $x_2 = 0; x_3 = -3\sqrt{1-a^2}$

c) Da die Funktionen punktsymmetrisch zum Ursprung sind, genügt es, die Fläche auf einer Seite des Ursprungs zu untersuchen: wenn sie maximal ist, ist es auch die gesamte Fläche. Links vom Ursprung liegt sie oberhalb der x-Achse und rechts unterhalb, da die Funktionen Parabeln dritten Grades mit positivem Koeffizienten vor dem x^3 sind. Die eingeschlossene Fläche rechts vom Ursprung ist:

$$A(a) = -\int_0^{3\sqrt{1-a^2}} \left[\frac{1}{9}x^3 - x\cdot(1-a^2)\right] dx = -\left[\frac{1}{36}x^4 - \frac{1}{2}x^2(1-a^2)\right]_0^{3\sqrt{1-a^2}}$$

$$= -\left[\frac{1}{36}\cdot 81(1-a^2)^2 - \frac{1}{2}\cdot 9(1-a^2)^2 - 0\right] = -\frac{9}{4}(1-a^2)^2 + \frac{9}{2}(1-a^2)^2 = \frac{9}{4}(1-a^2)^2$$

Untersuchung auf Extrema:

$A'(a) = \frac{9}{2}(1-a^2)\cdot(-2a) = -9a(1-a^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 = -1;\ a_2 = 0\ ;\ a_3 = 1$

$A''(a) = -9 + 27a^2 \qquad A''(-1) = A''(1) = 18 > 0\ ; \quad A''(0) = -9 < 0$

Ergebnis: Die Fläche ist maximal für die Funktion mit $a = 0$.

2. $$f'(x) = \frac{e^{2-\frac{1}{x}}\cdot\frac{1}{x^2}\cdot 4x^2 - e^{2-\frac{1}{x}}\cdot 8x}{16x^4} = \frac{e^{2-\frac{1}{x}}}{4x^2}\cdot\frac{4-8x}{4x^2} = f(x)\cdot\frac{1-2x}{x^2} = -f(x)\cdot\frac{2x-1}{x^2}$$

$f'(x) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}$

Zähler und Nenner von f sind immer positiv $\Rightarrow$ f ist immer positiv; x^2 ist immer positiv

$\Rightarrow$ f‘ ist negativ für $2x - 1$ positiv, d.h. für $x > \frac{1}{2}$

f‘ ist positiv für $2x - 1$ negativ, d.h. für $x < \frac{1}{2}$

$\Rightarrow$ f hat einen Hochpunkt bei $x = \frac{1}{2}$; $\quad f(x) = \dfrac{e^{2-\frac{1}{0{,}5}}}{4\left(\frac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{e^0}{1} = 1 \quad \Rightarrow \quad HOP(\frac{1}{2} \mid 1)$

Analytische Geometrie

3. a) $$\lambda_1\cdot\begin{pmatrix}0\\-2\\-3\end{pmatrix} + \lambda_2\cdot\begin{pmatrix}-3\\1\\4\end{pmatrix} + \lambda_3\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\9\\-13\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{rcl} -3\lambda_2 + 2\lambda_3 &=& 3 \\ -2\lambda_1 + \lambda_2 &=& 9 \\ -3\lambda_1 + 4\lambda_2 + \lambda_3 &=& -13 \end{array}\right|$$

Gauß:

$$\left.\begin{array}{rrr|r} 0 & -3 & 2 & 3 \\ -2 & 1 & 0 & 9 \\ -3 & 4 & 1 & -13 \end{array}\right. \begin{array}{l}(I-II):2\\ \\ \\ \end{array} \qquad \begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & -3 \\ -2 & 1 & 0 & 9 \\ -3 & 4 & 1 & -13 \end{array} \begin{array}{l} \\ (II+2\cdot I):(-3) \\ \\ \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -1 \\ -3 & 4 & 1 & -13 \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ III+3\cdot I \end{array} \qquad \begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -1 \\ 0 & -2 & 4 & -22 \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ (III+2\cdot II):\frac{8}{3} \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -9 \end{array} \begin{array}{l} \\ II+\frac{2}{3}\cdot III \\ \\ \end{array} \qquad \begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -9 \end{array} \begin{array}{l} I+2\cdot II-III \\ \\ \\ \end{array} \qquad \begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & -9 \end{array}$$

Ergebnis: $\vec{a} = -8\cdot\vec{b}_1 - 7\cdot\vec{b}_2 - 9\cdot\vec{b}_3$

b) (nach Sarrus):

$$D = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 2 \\ -2 & 1 & 0 \\ -3 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 0+0-16+6-0-6 = -16$$

$$D_1 = \begin{vmatrix} 3 & -3 & 2 \\ 9 & 1 & 0 \\ -13 & 4 & 1 \end{vmatrix} = 3+0+72+26-0+27 = 128 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_1 = \frac{D_1}{D} = \frac{128}{-16} = -8$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 9 & 0 \\ -3 & -13 & 1 \end{vmatrix} = 0+0+52+54-0+6 = 112 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_2 = \frac{D_2}{D} = \frac{112}{-16} = -7$$

$$D_3 = \begin{vmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -2 & 1 & 9 \\ -3 & 4 & -13 \end{vmatrix} = 0+81-24+9-0+78 = 144 \qquad \Rightarrow \qquad \lambda_3 = \frac{D_3}{D} = \frac{144}{-16} = -9$$

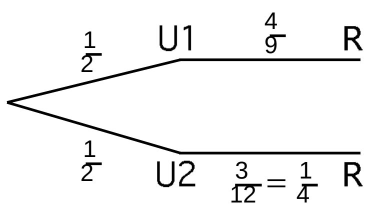
Ergebnis: $\vec{a} = -8\cdot\vec{b}_1 - 7\cdot\vec{b}_2 - 9\cdot\vec{b}_3$

4. Bestimmung von S_C: $\vec{S}_C = \frac{1}{3}\cdot\left(\vec{A}+\vec{B}+\vec{D}\right) = \frac{1}{3}\cdot\left[\begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}\right] = \frac{1}{3}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ $S_C(1|2|-2)$. Die gesuchte Menge ist:

$$\left\{ X \,\middle|\, \vec{X} = \vec{C} + \lambda\cdot\overrightarrow{CS_C};\ \lambda\in\mathbb{R};\ 0\le\lambda\le 1 \right\} = \left\{ X \,\middle|\, \vec{X} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix};\ \lambda\in\mathbb{R};\ 0\le\lambda\le 1 \right\}$$

Stochastik



5. a) $P(R) = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{25}{72}$ (vgl. rechts)

b) $P(\text{"dreimal R"}) = \binom{5}{3}\cdot\left(\frac{25}{72}\right)^3\cdot\left(\frac{47}{72}\right)^2 \approx 0{,}1784$

c) $P(A\cap R) = \frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9} = \frac{2}{9}$

$P(A)\cdot P(R) = \frac{1}{2}\cdot\frac{25}{72} = \frac{25}{144} \neq P(A\cap R)$ $\Rightarrow$ sie sind stochastisch abhängig.

d) $P_R(A) = \frac{P(A\cap R)}{P(R)} = \frac{\frac{2}{9}}{\frac{25}{72}} = \frac{16}{25}$

Dies ist die Wahrscheinlichkeit, dass eine gezogene rote Kugel aus Urne 1 ist.