Lösungen zum Aufgabenblatt zur linearen Abhängigkeit von Vektoren

12. a) $\vec{a} = \lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{a}_2 + \lambda_3 \cdot \vec{a}_3 \Leftrightarrow$

(2 | –1 | 3) = λ_1 ·(2 | 4 | 3) + λ_2 · (1 | 0 | –2) + λ_3 · (4 | –3 | 2) $\Leftrightarrow$

$$\left|\begin{array}{l} 2 = 2\lambda_1 + \lambda_2 + 4\lambda_3 \\ -1 = 4\lambda_1 - 3\lambda_3 \\ 3 = 3\lambda_1 - 2\lambda_2 + 2\lambda_3 \end{array}\right| \begin{array}{l} \mathrm{I} \quad 2\cdot\mathrm{I}+\mathrm{III} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 7 = 7\lambda_1 + 10\lambda_3 \\ -1 = 4\lambda_1 - 3\lambda_3 \\ 3 = 3\lambda_1 - 2\lambda_2 + 2\lambda_3 \end{array}\right| \begin{array}{l} \mathrm{I}' \\ 4\cdot\mathrm{I} - 7\cdot\mathrm{II} \Leftrightarrow \\ \ \end{array}$$

$$\left|\begin{array}{l} 7 = 7\lambda_1 + 10\lambda_3 \\ 35 = +61\lambda_3 \\ 3 = 3\lambda_1 - 2\lambda_2 + 2\lambda_3 \end{array}\right| \mathrm{II}' \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 7 = 7\lambda_1 + 10\lambda_3 \\ \lambda_3 = \frac{35}{61} \\ 3 = 3\lambda_1 - 2\lambda_2 + 2\lambda_3 \end{array}\right| \begin{array}{l} \mathrm{II}' \text{ in } \mathrm{I}' \\ \mathrm{II}' \\ \ \end{array} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 7 = 7\lambda_1 + 10\cdot\frac{35}{61} \\ \lambda_3 = \frac{35}{61} \\ 3 = 3\lambda_1 - 2\lambda_2 + 2\lambda_3 \end{array}\right| \begin{array}{l} \mathrm{I}'' \\ \ \\ \mathrm{I}'', \mathrm{II}' \text{ in } \mathrm{III} \end{array} \Leftrightarrow$$

$$\left|\begin{array}{l} \lambda_1 = \frac{11}{61} \\ \lambda_3 = \frac{35}{61} \\ 3 = 3\cdot\frac{11}{61} - 2\lambda_2 + 2\cdot\frac{35}{61} \end{array}\right| \mathrm{III}' \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} \lambda_1 = \frac{11}{61} \\ \lambda_3 = \frac{35}{61} \\ \lambda_2 = -\frac{40}{61} \end{array}\right|$$

Probe: $\frac{11}{61}$ · (2 | 4 | 3) – $\frac{40}{61}$ · (1 | 0 | –2) + $\frac{35}{61}$ · (4 | –3 | 2) = (2 | –1 | 3)

Nullsumme: – (2 | –1 | 3) + $\frac{11}{61}$ · (2 | 4 | 3) – $\frac{40}{61}$ · (1 | 0 | –2) + $\frac{35}{61}$ · (4 | –3 | 2) = (0 | 0 | 0)

b) $\vec{a} = \lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{a}_2 + \lambda_3 \cdot \vec{a}_3 \Leftrightarrow$ (3 | –5 | 2) = λ_1 ·(–1 | 2 | –5) + λ_2 ·(3 | 4 | 1) + λ_3 ·(4 | 12 | –8)

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 3 = -\lambda_1 + 3\lambda_2 + 4\lambda_3 \\ -5 = 2\lambda_1 + 4\lambda_2 + 12\lambda_3 \\ 2 = -5\lambda_1 + \lambda_2 - 8\lambda_3 \end{array}\right| \begin{array}{l} \mathrm{I} \cdot 2 \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 6 = -2\lambda_1 + 6\lambda_2 + 8\lambda_3 \\ -5 = 2\lambda_1 + 4\lambda_2 + 12\lambda_3 \\ 2 = -5\lambda_1 + \lambda_2 - 8\lambda_3 \end{array}\right| \begin{array}{l} :2 \\ \mathrm{I}+\mathrm{II} \Leftrightarrow \\ \ \end{array} \left|\begin{array}{l} 3 = -\lambda_1 + 3\lambda_2 + 4\lambda_3 \\ 1 = 10\lambda_2 + 20\lambda_3 \\ 2 = -5\lambda_1 + \lambda_2 - 8\lambda_3 \end{array}\right| \begin{array}{l} \cdot 5 \\ \mathrm{II}' \\ \ \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 15 = -5\lambda_1 + 15\lambda_2 + 20\lambda_3 \\ 1 = 10\lambda_2 + 20\lambda_3 \\ 2 = -5\lambda_1 + \lambda_2 - 8\lambda_3 \end{array}\right| \begin{array}{l} :5 \\ \ \\ \mathrm{I} - \mathrm{III} \end{array} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 3 = -\lambda_1 + 3\lambda_2 + 4\lambda_3 \\ 1 = 10\lambda_2 + 20\lambda_3 \\ 13 = 14\lambda_2 + 28\lambda_3 \end{array}\right| \begin{array}{l} \ \\ \cdot 7 \\ \mathrm{III}' \cdot 5 \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 3 = -\lambda_1 + 3\lambda_2 + 4\lambda_3 \\ 7 = 70\lambda_2 + 140\lambda_3 \\ 65 = 70\lambda_2 + 140\lambda_3 \end{array}\right| \mathrm{III}' - \mathrm{II}' \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 3 = -\lambda_1 + 3\lambda_2 + 4\lambda_3 \\ 7 = 70\lambda_2 + 140\lambda_3 \\ 58 = 0 \end{array}\right| \mathrm{III}''$$

Aus dem Widerspruch in III“ folgt, daß sich $\vec{a}$ nicht als Linearkombination der anderen Vektoren darstellen läßt.

13. $\vec{a} = \lambda_1 \cdot \vec{a}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{a}_2 \Leftrightarrow$ (–2 | 5 | s) = λ_1 ·(1 | –2 | 0) + λ_2 · (4 | –3 | 5) $\Leftrightarrow$

$$\left|\begin{array}{l} -2 = \lambda_1 + 4\lambda_2 \\ 5 = -2\lambda_1 - 3\lambda_2 \\ s = 5\lambda_2 \end{array}\right| \begin{array}{l} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \quad 2\cdot\mathrm{I}+\mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} -2 = \lambda_1 + 4\lambda_2 \\ 1 = +5\lambda_2 \\ s = 5\lambda_2 \end{array}\right| \begin{array}{l} 5\cdot\mathrm{I} - 4\cdot\mathrm{II}' \\ \mathrm{II}' \\ \mathrm{II}' \text{ in } \mathrm{III} \end{array} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} -14 = 5\lambda_1 \\ \lambda_2 = \frac{1}{5} \\ s = 1 \end{array}\right| \begin{array}{l} \mathrm{I}' \\ \ \\ \mathrm{III}' \end{array} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} \lambda_1 = -2\frac{4}{5} \\ \lambda_2 = \frac{1}{5} \\ s = 1 \end{array}\right|$$

$\vec{a} - \lambda_1 \cdot \vec{a}_1 - \lambda_2 \cdot \vec{a}_2$ = (–2 | 5 | 1) + $2\frac{4}{5}$ · (1 | –2 | 0) – $\frac{1}{5}$ · (4 | –3 | 5) = (0 | 0| 0)

14. a) λ_1 · (7 | 5) + λ_2 ·(1 | –1) = (0 | 0) $\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 7\lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ 5\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \end{array}\right| \begin{array}{l} \mathrm{I} \quad \mathrm{I}+\mathrm{II} \\ \mathrm{II} \end{array} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 12\lambda_1 = 0 \\ 5\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \end{array}\right| \begin{array}{l} \mathrm{I}' \\ \mathrm{I}' \text{ in } \mathrm{II} \end{array}$

$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{array}\right| \mathrm{II}'$ Es gibt also nur die triviale Lösung $\Rightarrow$ $\vec{a}$, $\vec{b}$ sind linear unabhängig

b) λ_1 · (–2 | 4) + λ_2 · (8 | –16) = (0 | 0) z.B. λ_1 = 4; λ_2 = 1 ist nicht-triviale Lösung

$\Rightarrow$ $\vec{a}$, $\vec{b}$ sind linear abhängig

c) $\lambda_1 \cdot (1 \mid -3 \mid 5 \mid 2) + \lambda_2 \cdot (-6 \mid 18 \mid -20 \mid -12) = (0 \mid 0 \mid 0 \mid 0) \Leftrightarrow$

$$\left|\begin{array}{r} \lambda_1 - 6\lambda_2 = 0 \\ -3\lambda_1 + 18\lambda_2 = 0 \\ 5\lambda_1 - 20\lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_1 - 12\lambda_2 = 0 \end{array}\right| \begin{array}{l} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} : (-3) \\ \mathrm{III} \quad : 5 \\ \mathrm{IV} \quad : 2 \end{array} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} \lambda_1 - 6\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - 6\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - 4\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - 6\lambda_2 = 0 \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ \\ \mathrm{III} - \mathrm{I} \\ \\ \end{array} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{c} \lambda_1 - 6\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - 6\lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - 6\lambda_2 = 0 \end{array}\right| \begin{array}{l} \mathrm{III}' \text{ in I} \\ \\ \mathrm{III}' \\ \\ \end{array} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{c} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_1 - 6\lambda_2 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - 6\lambda_2 = 0 \end{array}\right| \begin{array}{l} \mathrm{I}' \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

Es gibt also nur die triviale Lösung $\Rightarrow$ $\vec{a}, \vec{b}$ sind linear unabhängig

d) $\lambda_1 \cdot (3 \mid -5 \mid 4 \mid -2) + \lambda_2 \cdot (-1 \mid \frac{5}{3} \mid -\frac{4}{3} \mid \frac{2}{3}) = (0 \mid 0 \mid 0 \mid 0) \Leftrightarrow$

$$\left|\begin{array}{c} 3\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ -5\lambda_1 + \frac{5}{3}\lambda_2 = 0 \\ 4\lambda_1 - \frac{4}{3}\lambda_2 = 0 \\ -2\lambda_1 + \frac{2}{3}\lambda_2 = 0 \end{array}\right| \begin{array}{ll} \mathrm{I} & \\ \mathrm{II} & \left(-\frac{3}{5}\right) \\ \mathrm{III} & \frac{3}{4} \\ \mathrm{IV} & \left(-\frac{3}{2}\right) \end{array} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 3\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ 3\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \end{array}\right|$$

Für alle Koordinaten ergibt sich derselbe Zusammenhang zwischen λ_1 und λ_2. Jede Kombination, die hier passt, ergibt eine nicht-triviale Lösung; z.B. $\lambda_1 = 1$, $\lambda_3 = 3$.

[Probe: $1 \cdot (3 \mid -5 \mid 4 \mid -2) + 3 \cdot (-1 \mid \frac{5}{3} \mid -\frac{4}{3} \mid \frac{2}{3}) = (0 \mid 0 \mid 0 \mid 0)$]

$\Rightarrow$ $\vec{a}, \vec{b}$ sind linear abhängig

15. $\lambda_1 \cdot \left(\vec{a} + \vec{b} - \vec{c}\right) + \lambda_2 \cdot \left(\vec{b} - \vec{c}\right) + \lambda_3 \cdot \left(\vec{a} + \vec{b}\right) = \vec{0} \Leftrightarrow (\lambda_1 + \lambda_3) \cdot \vec{a} + (\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) \cdot \vec{b} + (-\lambda_1 - \lambda_2) \cdot \vec{c} = \vec{0}$

Da $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$ linear unabhängig sind, müssen die drei Koeffizienten alle 0 sein. $\Rightarrow$

$$\left|\begin{array}{l} \lambda_1 \qquad + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 - \lambda_2 \qquad = 0 \end{array}\right| \begin{array}{l} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \ \mathrm{II} + \mathrm{III} \\ \mathrm{III} \end{array} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{c} \lambda_1 + \lambda_3 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{array}\right| \begin{array}{l} \quad \mathrm{II}' \text{ in I} \\ \mathrm{II}' \\ \quad \mathrm{I}' \text{ in III} \end{array} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \end{array}\right| \begin{array}{l} \mathrm{I}' \\ \\ \mathrm{III}' \end{array}$$

Es gibt also nur die triviale Lösung. Also sind sie linear unabhängig

16. a) $\lambda_1 \cdot (3 \mid 2 \mid -1) + \lambda_2 \cdot (-1 \mid 1 \mid 0) + \lambda_3 \cdot (0 \mid 10 \mid -2) = (0 \mid 0 \mid 0) \Leftrightarrow$

$$\left|\begin{array}{l} 3\lambda_1 - \lambda_2 \qquad\quad = 0 \\ 2\lambda_1 + \lambda_2 + 10\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 \qquad - 2\lambda_3 = 0 \end{array}\right| \begin{array}{l} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \ \mathrm{I} + \mathrm{III} \\ \mathrm{III} \end{array} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 3\lambda_1 - \lambda_2 \qquad\quad = 0 \\ 5\lambda_1 \qquad + 10\lambda_3 = 0 \\ -\lambda_1 \qquad\quad - 2\lambda_3 = 0 \end{array}\right| \begin{array}{l} \\ \mathrm{II}' \quad : 5 \\ \qquad (-1) \end{array} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 3\lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 \end{array}\right|$$

Da II‘ und III gleich sind, gibt es nicht-triviale Lösungen. z.B.: $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 6$, $\lambda_3 = -1$.
[Probe: $2 \cdot (3 \mid 2 \mid -1) + 6 \cdot (-1 \mid 1 \mid 0) - (0 \mid 10 \mid -2) = (0 \mid 0 \mid 0)$]
$\Rightarrow$ Die Menge von Vektoren ist linear abhängig.

b) Da ein Nullvektor dabei ist, ist diese Menge von Vektoren linear abhängig.

c) Der Vektor $(2 \mid -3 \mid 1)$ ist das (-2)-fache des Vektors $(-1 \mid \frac{3}{2} \mid -\frac{1}{2})$
$\Rightarrow$ $(2 \mid -3 \mid 1) = (-2) \cdot (-1 \mid \frac{3}{2} \mid -\frac{1}{2})$ und $(2 \mid -3 \mid 1) = (-2) \cdot (-1 \mid \frac{3}{2} \mid -\frac{1}{2}) + 0 \cdot (5 \mid -2 \mid 0)$
Da sich (in beiden Fällen) ein Vektor als Linearkombination der anderen darstellen lässt, sind beide Mengen von Vektoren linear abhängig.

d) Für den dritten Vektor gilt: $2 \cdot \vec{a} = 2 \cdot \vec{a} + 0 \cdot \vec{b}$
Da er sich als Linearkombination der beiden ersten darstellen lässt, ist diese Menge von Vektoren linear abhängig.