Lösungen zum Aufgabenblatt zur Kombinatorik

1. Der Versuch ist: 2 Plätze von 8 raussuchen (ohne Reihenfolge). $\Rightarrow |\Omega| = \binom{8}{2} = \frac{8!}{2!\ 6!} = 28$
   Es gibt 7 Möglichkeiten, wie die Läufer nebeneinander starten können: Plätze 1 & 2, Plätze 2 & 3, Plätze 3 & 4, Plätze 4 & 5, Plätze 5 & 6, Plätze 6 & 7 und Plätze 7 & 8.
   Damit ist die Wahrscheinlichkeit: $P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{7}{28} = \frac{1}{4} = 0{,}25\ (= 25\%)$
2. $|\Omega| = \binom{50}{3} = \frac{50!}{3!\ 47!} = \frac{50 \cdot 49 \cdot 48}{3 \cdot 2} = 19600$
   a) $|E| = \binom{45}{3} = \frac{45!}{3!\ 42!} = \frac{45 \cdot 44 \cdot 43}{3 \cdot 2} = 14190 \qquad \Rightarrow \qquad P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{14190}{19600} \approx 0{,}724\ (= 72{,}4\%)$
   b) $|E| = \binom{45}{2} \cdot \binom{5}{1} = \frac{45!}{2!\ 43!} \cdot \frac{5!}{1!\ 4!} = \frac{45 \cdot 44}{2} \cdot 5 = 4950 \quad \Rightarrow \quad P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{4950}{19600} \approx 0{,}253\ (= 25{,}3\%)$
   c) Dies ist das Gegenereignis zu a). $P(E) = 1 - P\left(\overline{E}\right) \approx 1 - 0{,}724 = 0{,}276\ (= 27{,}6\%)$
3. Die Sendung hat 4 defekte Taschenrechner, also 46 intakte. Hierfür ist die Wahrscheinlichkeit auszurechnen, daß höchstens einer defekt ist, also daß keiner oder daß einer defekt ist.
   $|E| = |\text{"0 def."}| + |\text{"1 def."}| = \binom{46}{10} + \binom{46}{9} \cdot \binom{4}{1} = 4076350421 + 1101716330 \cdot 4 = 8483215740$
   $|\Omega| = \binom{50}{10} \approx 1{,}027 \cdot 10^{10} \qquad \Rightarrow \qquad P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{8483215740}{1{,}027 \cdot 10^{10}} \approx 0{,}826\ (= 82{,}6\%)$
4. $|\Omega| = \binom{10}{3} = 120$, $\qquad |E| = \binom{1}{1} \cdot \binom{9}{2} = 36 \qquad \Rightarrow \qquad P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{36}{120} = 0{,}3\ \ (= 30\%)$
5. Ω ist die Menge der Permutationen der vier Politiker. $\qquad \Rightarrow \qquad |\Omega| = 4! = 24$
6. Es ist nicht festgelegt, wieviele Politiker von jeder Nation aufgenommen werden. Damit aber beide Nationen drauf sind, müssen es bei jeder auf jeden Fall mehr als 0 sein.
   Wenn man die Anzahl der Politiker der schwächer vertretenen Nation k nennt, muß gelten: $0 < k \le 2$. Es gibt also zwei Fälle: k = 1 und k = 2.
   Wenn man die Plätze für die schwächer vertretene Nation auswählt, gibt es für die andere nur eine Möglichkeit sich zu setzen: auf die übriggebliebenen Plätze. Für die beiden Fälle folgt:
   k = 1: $\qquad |\Omega_1| = \binom{5}{1} = 5 \qquad$ k = 2: $\qquad |\Omega_2| = \binom{5}{2} = 10$
   Da jede Nation die kleinere sein kann, gibt es 2·(5+10) = 30 Möglichkeiten, das Foto anzufertigen.
7. $|\Omega| = \binom{6}{4} = 15$
8. Es gibt verschiedene Möglichkeiten diese Aufgabe zu lösen. Die kürzeste ist:
   $|\Omega| =$ Anzahl der Mögl., 2 von m Personen auszuwählen $= \binom{m}{2} = \frac{m!}{2!\ (m-2)!} = \frac{m \cdot (m-1)}{2}$
9. $|\Omega| = 3 \cdot 4 \cdot 6 = 72$ (Zählprinzip), oder mit Kombinatorik: $|\Omega| = \binom{3}{1} \cdot \binom{4}{1} \cdot \binom{6}{1} = 3 \cdot 4 \cdot 6 = 72$
10. 1. Weg: Wenn man alle Kugeln unterscheidbar ansetzt (10! Möglichkeiten), hat man zuviel gezählt: 5! für rot, 3! für blau und 2! für weiß. $\Rightarrow \quad |\Omega| = \frac{10!}{5!\ 3!\ 2!} = 2520$
    2. Weg: Man wählt erst die Positionen der roten Kugeln, aus den verbleibenden Plätzen die der blauen usw. $\quad \Rightarrow \quad |\Omega| = \binom{10}{5} \cdot \binom{5}{3} \cdot \binom{2}{2} = 252 \cdot 10 \cdot 1 = 2520$
11. genauso wie Aufg. 10.: $|\Omega| = \frac{13!}{4!\ 3!\ 6!} = 60060$ oder $|\Omega| = \binom{13}{4} \cdot \binom{9}{3} \cdot \binom{6}{6} = 715 \cdot 84 \cdot 1 = 60060$
12. Die Autos sind verschieden, also müssen die Plätze mit Reihenfolge ausgesucht werden.
    Berechnung mit 3-Permutationen: $\qquad |\Omega| = \frac{7!}{(7-3)!} = 210$
13. Jeder Ring hat alle 4 Zahlen. Dieselben Zahlen können sich also wiederholen. Dies entspricht einem Versuch mit Zurücklegen. $\qquad \Rightarrow \qquad |\Omega| = 4^4 = 256$
14. Geometrie: $\binom{4}{2}$, $\qquad$ Algebra: $\binom{6}{3} \qquad \Rightarrow \qquad |\Omega| = \binom{4}{2} \cdot \binom{6}{3} = 6 \cdot 20 = 120$
15. $|\Omega| = \binom{32}{8} = 10518300$

16. a) $|\Omega| = 6! = 720$ **b)** 3-Permutationen: $|\Omega| = \frac{6!}{(6-3)!} = 120$

    c) Für eine feste erste Ziffer gibt es 5! Zahlen. Also gibt es $3 \cdot 5! = 360$ Zahlen, die mit 1, 2 oder 3 anfangen. Die kleinste Zahl mit einer 4 in der ersten Ziffer ist also an der 361. Stelle.

17. vgl. Aufg. 10.: $|\Omega| = \frac{6!}{2!\ 3!} = 60$ oder $|\Omega| = \binom{6}{1} \cdot \binom{5}{2} \cdot \binom{3}{3} = 6 \cdot 10 \cdot 1 = 60$

18. Wenn alle Stühle in einer Reihe ständen, gäbe es 8! Möglichkeiten. Aber wenn beim runden Tisch alle um einen Platz weiterrutschen (8 Möglichkeiten), ergibt es dieselbe Sitzordnung.

    $\Rightarrow \quad |\Omega| = \frac{8!}{8} = 7! = 5040$

19. a) Es handelt sich um 10-Tupel. $\Rightarrow \quad |\Omega| = 2^{10} = 1024$
    Die Ergebnisse sind gleichwahrscheinlich.

    b) $\Omega = \{k_0;\ k_1;\ \ldots\ ;k_{10}\}$ wobei: k_i = "Das Ergebnis K kommt i-mal vor".
    Die Ergebnisse sind nicht gleichwahrscheinlich.

20. $\Omega = \{K;\ Z\}^3 \ \Rightarrow \ |\Omega| = 2^3 = 8;\ |A| = \binom{3}{2} = 3 \quad \Rightarrow \quad P(A) = \frac{|A|}{|\Omega|} = \frac{3}{8} = 0{,}375\ (= 37{,}5\%)$

21. "verschiedenziffrig" bedeutet: "ohne Zurücklegen", also 3-Permutationen

    $\Rightarrow \quad |\Omega| = \frac{4!}{(4-3)!} = 24$

    $|E| = |\text{"1 und 2"}| = |\text{"nicht 3"}| + |\text{"nicht 4"}| = 3! + 3! = 12 \quad \Rightarrow \quad P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{12}{24} = \frac{1}{2}\ (= 50\%)$

22. $|\Omega| = \frac{8!}{2!\ 3!\ 2!} = 1680$ (vgl. Aufg. 10.)

    a) Mit 22 beginnen heißt, daß man aus dem Rest (d.h.: 1, 1, 2, 3, 3, 4) eine 6-stellige Zahl bildet. $|E| = \frac{6!}{2!\ 2!} = 180 \quad \Rightarrow \quad P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{180}{1680} = \frac{9}{84} \approx 0{,}107\ (= 10{,}7\%)$

    b) Mit 123 beginnen heißt, daß man aus dem Rest (d.h.: 1, 2, 2, 3, 4) eine 5-stellige Zahl bildet. $|E| = \frac{5!}{2!} = 60 \quad \Rightarrow \quad P(E) = \frac{|E|}{|\Omega|} = \frac{60}{1680} = \frac{3}{84} \approx 0{,}036\ (= 3{,}6\%)$

23. Diese Aufgabe verlangt keine Reihenfolge bei den Ergebnissen. Dennoch ist es einfacher, mit Reihenfolge zu arbeiten, da dann die Laplace-Annahme erfüllt ist. Manchmal hat man die Wahl, ob man mit oder ohne Reihenfolge arbeiten möchte. In der Regel ist es dann nur wichtig, daß man für das Ereignis und für Ω einheitlich vorgeht: entweder beide mit oder beide ohne Reihenfolge. Hier erfolgt die Lösung mit Reihenfolge:

    $\Omega = \{1;\ 2;\ 3\ ;4\ ;5\ ;6\}^4 \quad \Rightarrow \quad |\Omega| = 6^4 = 1296$

    Augenzahlen verschieden heißt: ohne Wiederholung. Also Berechnung mit 4-Permutation.

    $|A| = \frac{6!}{(6-4)!} = 360 \quad \Rightarrow \quad P(A) = \frac{360}{1296} = \frac{5}{18} \approx 0{,}27778$

    $\overline{B}$: "alle Augenzahlen gleich" $\quad |\overline{B}| = 6 \cdot 1 \cdot 1 \cdot 1 = 6$

    $\Rightarrow \quad |B| = |\Omega| - |\overline{B}| = 1296 - 6 = 1290 \quad \Rightarrow \quad P(B) = \frac{1290}{1296} = \frac{215}{216} \approx 0{,}99537$

24. a) $|\Omega| = 1296$ (win in 43.) $\quad \overline{A}$: "keine 6" $\quad |\overline{A}| = 5^4 = 625 \quad \Rightarrow \quad P(A) = 1 - \frac{625}{1296} \approx 0{,}51775$

    b) Für jeden Wurf (mit Reihenfolge) gibt es $6 \cdot 6 = 36$ Möglichkeiten. $\Rightarrow \quad |\Omega| = 36^{24}$

    $\overline{B}$: "keine Doppelsechs" $\quad |\overline{B}| = 35^{24} \quad \Rightarrow \quad P(B) = 1 - \left(\frac{35}{36}\right)^{24} \approx 0{,}49140$

25. $\Omega = \{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6\}^3 \quad \Rightarrow |\Omega| = 6^3 = 216$ $\quad |A_1| = 1 \cdot 5 \cdot 5 = 25 \quad \Rightarrow \quad P(A_1) = \frac{25}{216} \approx 0{,}11574$

    $|A_2| = 3 \cdot |A_1| = 75 \quad \Rightarrow \quad P(A_2) = \frac{75}{216} \approx 0{,}34722$

    Gemeint bei A_3 ist: "<u>genau</u> beim 1. und 3. Wurf". $|A_3| = 1 \cdot 5 \cdot 1 = 5 \quad \Rightarrow \quad P(A_3) = \frac{5}{216} \approx 0{,}02315$

    $\overline{A_4}$: "keine 6" oder "genau eine 6" oder "genau dreimal 6" $\quad |\overline{A_4}| = 5 \cdot 5 \cdot 5 + 75 + 1 = 201$

$|A_4| = |\Omega| - |\overline{A}_4| = 216 - 201 = 15 \;\Rightarrow\; P(A_4) = \frac{15}{216} = \frac{5}{72} \approx 0{,}06944$

$|\overline{A}_5| = 5^3 = 125 \;\Rightarrow\; P(A_5) = \frac{91}{216} \approx 0{,}42130$

A_6: "genau dreimal 6" oder A_4 $\quad |A_6| = 1 + 15 = 16 \;\Rightarrow\; P(A_6) = \frac{16}{216} = \frac{2}{27} \approx 0{,}07407$

Für A_7 entweder mit dem Gegenereignis: "alle verschieden" oder "alle gleich"
oder: Wenn die beiden gleichen Würfe in den ersten beiden Positionen sind, gibt es 6 Möglichkeiten für den ersten Wurf, 1 Möglichkeit für den 2. Wurf und 5 Möglichkeiten für den 3. Wurf. Dieselbe Argumentation gilt für jede 2 beliebigen anderen Positionen.
Es gibt $\binom{3}{2}$ Möglichkeiten die Position rauszusuchen. Damit folgt:

$|A_7| = \binom{3}{2} \cdot 6 \cdot 1 \cdot 5 = 90 \;\Rightarrow\; P(A_7) = \frac{90}{216} = \frac{5}{12} \approx 0{,}41667$

A_8: A_7 oder "alle gleich" $\quad |A_8| = 90 + 6 = 96 \;\Rightarrow\; P(A_8) = \frac{96}{216} = \frac{4}{9} \approx 0{,}44444$

$A_9 = \overline{A}_8 \;\Rightarrow\; P(A_9) = 1 - P(A_8) = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9} \approx 0{,}55556$

A_{10} besteht aus:
(1; 3; 6); (1; 4; 5); (2; 2; 6); (2; 3; 5); (2; 4; 4); (3; 3; 4) und deren Permutationen.

$|A_{10}| = 3! + 3! + \frac{3!}{2!} + 3! + \frac{3!}{2!} + \frac{3!}{2!} = 27 \;\Rightarrow\; P(A_{10}) = \frac{27}{216} = \frac{1}{8} = 0{,}125$

26. a) Verfahren wie für A_{10} in 25.
    b) $|A_1| = 3 + 10 + 21 + 27 + 25 + 6 + 1 = 108 \;\Rightarrow\; P(A_1) = 0{,}5$
    $|A_2| = 1 + 10 + 25 + 25 + 10 + 1 = 72 \;\Rightarrow\; P(A_2) \approx 0{,}33333$
    $|A_3| = 1 + 6 + 15 + 27 + 21 + 3 = 73 \;\Rightarrow\; P(A_3) \approx 0{,}33796$
    $|A_4| = 181 \;\Rightarrow\; P(A_4) \approx 0{,}83796 \qquad |A_5| = 108 \;\Rightarrow\; P(A_5) = 0{,}5$

27. 1) $|\Omega| = 365^2 = 133225$; $\quad |A_1| = 365 \cdot 364 = 132860 \;\Rightarrow\; P(A_1) \approx 0{,}99726$
    2) $A_2 = \overline{A}_1 \;\Rightarrow\; P(A_2) = 1 - P(A_1) \approx 1 - 0{,}99726 = 0{,}00274$
    3) $|\Omega| = 365^3$; $\quad |A_3| = 365 \cdot 364 \cdot 363 \;\Rightarrow\; P(A_3) \approx 0{,}99180$
    4) $A_4 = \overline{A}_3 \;\Rightarrow\; P(A_4) = 1 - P(A_3) \approx 0{,}00820$
    oder direkt: |"genau zwei"| = $\binom{3}{2} \cdot 365 \cdot 1 \cdot 364 = 398580$ (vgl. A_7 von 25.)
    |"alle drei"| = 365 $\quad \Rightarrow |A_4| = 398580 + 365$
    5) $|\Omega| = 365^k$; $|\overline{A}_5| = \frac{365!}{(365-k)!} \;\Rightarrow\; P(\overline{A}_5) = \frac{365!}{365^k \cdot (365-k)!} \;\Rightarrow\; P(A_5) = 1 - \frac{365!}{365^k \cdot (365-k)!}$

28. Die erste Gruppe wird gewählt (die zweite ergibt sich). $\quad \Rightarrow |\Omega| = \binom{8}{4} = 70$
    A: "genau zwei Jungen und genau zwei Mädchen"
    $\Rightarrow |A| = \binom{4}{2} \cdot \binom{4}{2} = 36 \;\Rightarrow\; P(A) = \frac{36}{70} = \frac{18}{35} \approx 0{,}51429$

29. $|\Omega| = 10^5$; $|\overline{A}| = \frac{10!}{5!} = 30240 \;\Rightarrow\; P(A) = 1 - \frac{30240}{100000} = \frac{436}{625} = 0{,}69760$

30. Die Kästen werden mit 1; 2; ... ; n durchnummeriert. Für jede Kugel wird also eine Nummer zwischen 1 und n gezogen, wobei dieselbe Nummer mehrmals vorkommen kann. Es ist also ein Versuch mit Zurücklegen, wobei k Nummern ausgewählt werden. $\quad \Rightarrow |\Omega| = n^k$
    a) Nummerieren wir die ausgewählten Kästen mit den Zahlen 1 bis k, besteht A aus allen Permutationen von (1; 2; ... ;k) $\quad \Rightarrow |A| = k! \;\Rightarrow\; P(A) = \frac{k!}{n^k}$
    b) Es gibt $\binom{n}{k}$ Mögl., k Kästen auszuwählen, und für jede gibt es $|A|$ mögl. Ergebnisse.
    $\Rightarrow |B| = \binom{n}{k} \cdot k! \quad P(B) = \binom{n}{k} \cdot \frac{k!}{n^k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot n^k}$