Lösungen zur analytischen Geometrie, Buch S. 196f

1. a) E in die Parameterform umwandeln: $x_2 = -2x_1 + 2x_3 + 3$

   Wähle: $x_1 = \lambda$; $x_3 = \mu \quad \Rightarrow \quad x_2 = 3 - 2\lambda + 2\mu$

   $\Rightarrow \quad E: \quad \vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 3 - 2\lambda + 2\mu \\ \mu \end{pmatrix}$ In F einsetzen:

   $\lambda - 3 + 2\lambda - 2\mu + 3\mu - 3 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3\lambda + \mu - 6 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \mu = 6 - 3\lambda$ In E einsetzen:

   $$s: \quad \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + (6 - 3\lambda) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \left[\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 \\ 15 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -8 \\ -3 \end{pmatrix}$$

   b) s: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ c) s: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

   d) E und F sind echt parallel e) s: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

   f) s: $\vec{X} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ g) s: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$

2. a) s: $\vec{X} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) s: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ c) s: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

   d) s: $\vec{X} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) s: $\vec{X} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ c) s: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

3. s: $\vec{X} = \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

4. a) s: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ b) s: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ -11 \\ 4 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

5. a) s: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ b) s: $\vec{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ c) s: $\vec{X} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

6. a) E und F echt parallel b) E = F c) s: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$

7. g und h sind Schnittgeraden von je 2 Ebenen: g: $\vec{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$; h: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

   g und h schneiden sich in genau einem Punkt, in $S\left(3\tfrac{4}{13} \,\middle|\, -1\tfrac{9}{13} \,\middle|\, \tfrac{7}{13}\right)$, und legen deshalb eine Ebene fest. Als Aufpunkt dient ein beliebiger Punkt von g oder h, als Spannvektoren die Richtungsvektoren der Geraden. Mögliches Ergebnis: E: $\vec{X} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

8. F: $\vec{X} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ (d.h. Ursprung ist Aufpunkt) G: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

a) Gleiche Spannvektoren $\Rightarrow$ F || G. Die Symmetrieebene muss auch parallel dazu sein (d.h. gleiche Spannvektoren) und genau in der Mitte zwischen F und G (Skizze!), d.h.:

$\vec{A}_A = \vec{A}_F + \frac{1}{2} \cdot \overrightarrow{A_F A_G} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad$ A: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

b) $\vec{A}_B = \vec{A}_F + 2 \cdot \overrightarrow{A_F A_G} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad$ B: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 20 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

c) $\vec{A}_C = \vec{A}_G + 2 \cdot \overrightarrow{A_G A_F} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \Rightarrow \quad$ C: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

d) Der Ursprung liegt auf F und ist Fixpunkt bei der Spiegelung. Es werden zwei weitere Punkte von F benötigt, die nicht auf einer Geraden mit dem Ursprung und die nicht in der x_1x_2-Ebene liegen. z. B. ($\lambda = 0$; $\mu = 1$) P(0 | 2 | 1) und ($\lambda = 1$; $\mu = 1$) Q(1 | 0 | 1). Bei der Spiegelung an der x_1x_2-Ebene dreht sich das Vorzeichen von x_3 um. Gesucht ist also die Ebene durch O(0 | 0 | 0), P'0 | 2 | –1) und Q'(1 | 0 | –1).

Mögliches Ergebnis: D: $\vec{X} = \vec{O} + \lambda \cdot \overrightarrow{OP'} + \mu \cdot \overrightarrow{OQ'} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

2. Weg: Der Spannvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$ ist parallel zur x_1x_2-Ebene und bleibt bei der Spiegelung erhalten. Beim zweiten Spannvektor ändert sich das Vorzeichen von x_3.

Der Ursprung ist Aufpunkt. $\Rightarrow$ D: $\vec{X} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$. Dies ist dieselbe Ebene wie beim 1. Weg, da Aufpunkt und ein Spannvektor gleich sind und $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

e) Wenn ein Punkt an der x_2-Achse gespiegelt wird, bleibt seine x_2-Koordinate gleich und die x_1- und die x_3-Koordinate ändern das Vorzeichen.
3 Punkte auf G, die nicht auf einer Geraden liegen, sind:
A_G(0 | 10 | 0), (für $\lambda = 1$; $\mu = 0$) R(1 | 8 | 0) und (für $\lambda = 0$; $\mu = 1$) S(0 | 12 | 1)
Ihre gespiegelten Punkte sind: A_G'(0 | 10 | 0), R'(–1 | 8 | 0) und S'(0 | 12 | –1)

Mögliches Ergebnis: E: $\vec{X} = \vec{A}'_G + \lambda \cdot \overrightarrow{A'_G R'} + \mu \cdot \overrightarrow{A'_G S'} = \begin{pmatrix} 0 \\ 10 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$.

9. x_1x_2-Ebene: $\vec{X} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ \mu \\ 0 \end{pmatrix}$

in E einsetzen: $3\lambda + 2\mu + 18 = 0 \iff \mu = -\frac{3}{2}\lambda - 9$ oben einsetzen:

$s_{1;\,2}$: $\vec{X} = \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(-\frac{3}{2}\lambda - 9\right) \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -1\frac{1}{2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -9 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda^* \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix}$

Analog folgen die anderen Spurgeraden: $s_{2;\,3}$: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 18 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$; $s_{1;\,3}$: $\vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 18 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$

10\. a) Die Ebene in einer Höhe h über der x_1x_2-Ebene ist: $\vec{X} = \begin{pmatrix}0\\0\\h\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda\\\mu\\h\end{pmatrix}$

Dies muss mit E geschnitten werden, um die gesuchte Höhenlinie zu finden:

$2\lambda - \mu + 2h = 6 \;\Leftrightarrow\; \mu = 2\lambda + 2h - 6$ Oben einsetzen:

$\vec{X} = \begin{pmatrix}0\\0\\h\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + (2\lambda + 2h - 6)\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\2h-6\\h\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$. Die gesuchten Höhenlinien sind:

$h = -1$: $\vec{X} = \begin{pmatrix}0\\-8\\-1\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$; $h = 0$: $\vec{X} = \begin{pmatrix}0\\-6\\0\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$; $h = 5$: $\vec{X} = \begin{pmatrix}0\\4\\5\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$

b) F_c: $\vec{X} = \begin{pmatrix}-c\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-c-2\lambda\\\lambda\\\mu\end{pmatrix}$ in E einsetzen:

$2(-c-2\lambda) - \lambda + 2\mu = 6 \;\Leftrightarrow\; \mu = \frac{5}{2}\lambda + 3 + c$ in F_c einsetzen:

s_c: $\vec{X} = \begin{pmatrix}-c\\0\\0\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix} + \left(\frac{5}{2}\lambda + 3 + c\right)\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-c\\0\\3+c\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\2\frac{1}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-c\\0\\3+c\end{pmatrix} + \lambda^*\cdot\begin{pmatrix}-4\\2\\5\end{pmatrix}$

Die gesuchten Schnittgeraden sind:

$c = -1$: $\vec{X} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}-4\\2\\5\end{pmatrix}$; $c = 0$: $\vec{X} = \begin{pmatrix}0\\0\\3\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}-4\\2\\5\end{pmatrix}$; $c = 5$: $\vec{X} = \begin{pmatrix}-5\\0\\8\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}-4\\2\\5\end{pmatrix}$

c) Die x_1x_2-Ebene $\vec{X} = \lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda\\\mu\\0\end{pmatrix}$ in F_c einsetzen:

$\lambda + 2\mu + c = 0 \;\Leftrightarrow\; \lambda = -2\mu - c$ in die x_1x_2-Ebene einsetzen:

s_c: $\vec{X} = (-2\mu - c)\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-c\\0\\0\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}$

Im x_1x_2-Koordinatensystem ist die Spurgerade:

$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-c\\0\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix} \;\Leftrightarrow\; \left|\begin{array}{rl|l} x_1 = & -c-2\lambda & \mathrm{I} \\ x_2 = & \lambda & \mathrm{II}\end{array}\right.$ II in I: $x_1 = -c - 2x_2 \;\Leftrightarrow\; x_2 = -\frac{1}{2}x_1 - \frac{c}{2}$

$\Rightarrow$ Die Steigung der Spurgeraden ist $m_s = -\frac{1}{2}$.

Die Höhenlinie von E in der x_1x_2-Ebene ist: $\vec{X} = \begin{pmatrix}0\\-6\\0\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}$

Im x_1x_2-Koordinatensystem ist dies:

$\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\-6\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \;\Leftrightarrow\; \left|\begin{array}{rl|l} x_1 = & \lambda & \mathrm{I} \\ x_2 = & -6+2\lambda & \mathrm{II}\end{array}\right.$ I in II: $x_2 = 2x_1 - 6$

$\Rightarrow$ Die Steigung der Höhenlinie ist $m_h = 2$.

Für rechtwinklige Geraden gilt, dass das Produkt ihrer Steigungen –1 ergibt.

Da $m_s \cdot m_h = -\frac{1}{2}\cdot 2 = -1$, folgt, dass diese Geraden senkrecht aufeinander stehen.

11\. E_{ABC}: $\vec{X} = \vec{A} + \lambda\cdot\overrightarrow{BA} + \mu\cdot\overrightarrow{AC} = \begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}4\\2\\-1\end{pmatrix}$

E_{RST}: $\vec{X} = \vec{R} + \lambda\cdot\overrightarrow{RS} + \mu\cdot\overrightarrow{RT} = \begin{pmatrix}-3\\1\\-3\end{pmatrix} + \lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix} + \mu\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}$ $g = E_{ABC} \cap E_{RST}$

$$\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}4\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\1\\-3\end{pmatrix}+\sigma\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\2\end{pmatrix}+\tau\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left|\begin{array}{l}2+2\lambda+4\mu=-3+\sigma-\tau\\-1+\lambda+2\mu=\ \ 1+\ \ \sigma+\tau\\2+3\lambda-\mu=-3+2\sigma+\tau\end{array}\right|\begin{array}{l}\text{I I+II}\\\text{II}\\\text{III}\end{array}\Leftrightarrow$$

$$\left|\begin{array}{l}1+3\lambda+6\mu=-2+2\sigma\\-1+\lambda+2\mu=\ \ 1+\ \ \sigma+\tau\\2+3\lambda-\mu=-3+2\sigma+\tau\end{array}\right|\begin{array}{l}\text{I}'\\\text{I}'-2\cdot\text{II}\\ \ \end{array}\Leftrightarrow\left|\begin{array}{l}1+3\lambda+6\mu=-2+2\sigma\\3+\lambda+2\mu=-4\qquad-2\tau\\2+3\lambda-\mu=-3+2\sigma+\tau\end{array}\right|\begin{array}{l}+2\\\text{II}'\ +4;\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\\+3\end{array}\Leftrightarrow$$

$$\left|\begin{array}{l}3+3\lambda+6\mu=2\sigma\\-\frac{7}{2}-\frac{1}{2}\lambda-\mu=\qquad\tau\\5+3\lambda-\mu=2\sigma+\tau\end{array}\right|\begin{array}{l}\ \\\ \\\text{I}';\text{II}'\text{ in III}\end{array}\Rightarrow\ 5+3\lambda-\mu=3+3\lambda+6\mu-\frac{7}{2}-\frac{1}{2}\lambda-\mu\ \Leftrightarrow\ \lambda=-11+12\mu$$

$$\Rightarrow\quad g:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}2\\-1\\2\end{pmatrix}+(-11+12\mu)\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}4\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-20\\-12\\-31\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}28\\14\\35\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-20\\-12\\-31\end{pmatrix}+\mu^*\cdot\begin{pmatrix}4\\2\\5\end{pmatrix}$$

In der Höhe 0 über der x_1x_2-Ebene: Schnittpunkt mit der x_1x_2-Ebene,
d.h. g in $x_3 = 0$ einsetzen: $-31+5\mu^*=0\ \Leftrightarrow\ \mu^*=6,2$; in g einsetzen:

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}-20\\-12\\-31\end{pmatrix}+6,2\cdot\begin{pmatrix}4\\2\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4,8\\0,4\\0\end{pmatrix}$$ Der Gratpunkt in der Höhe 0 ist (4,8 | 0,4 | 0).

g mit der Ebene in der Höhe 9 parallel zur x_1x_2-Ebene $\vec{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\9\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ schneiden:

$$\begin{pmatrix}0\\0\\9\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-20\\-12\\-31\end{pmatrix}+\nu\cdot\begin{pmatrix}4\\2\\5\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left|\begin{array}{l}\lambda=-20+4\nu\\\mu=-12+2\nu\\9=-31+5\nu\end{array}\right|\Leftrightarrow\left|\begin{array}{c}\lambda=12\\\mu=4\\\nu=8\end{array}\right|\Rightarrow\ \vec{x}=\begin{pmatrix}12\\4\\9\end{pmatrix}$$

Der Gratpunkt in der Höhe 9 ist (12 | 4 | 9).

12. 1. Interpretation: Nullsumme der Vektoren $\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}-1\\4\\2\end{pmatrix}$.

2. Interpretation: 3 Ebenen, die alle den Ursprung enthalten, in einem Gleichungssystem, d.h. gesucht sind gemeinsame Punkte aller 3 Ebenen.

$$\text{Gauß:}\ \left.\begin{array}{rrr|r}3&2&-1&0\\2&1&4&0\\1&-1&2&0\end{array}\right.\begin{array}{l}\ \\2\cdot\text{I}-3\cdot\text{II}\\\text{I}-3\cdot\text{III}\end{array}\Leftrightarrow\begin{array}{rrr|r}3&2&-1&0\\0&1&-14&0\\0&5&-7&0\end{array}\begin{array}{l}\text{I}-2\cdot\text{II}\\\ \\\text{III}-5\cdot\text{II}\end{array}\Leftrightarrow\begin{array}{rrr|r}3&0&27&0\\0&1&-14&0\\0&0&63&0\end{array}\begin{array}{c}\text{I}-27\cdot\text{III};:3\\\text{II}+14\cdot\text{III}\\:63\end{array}\Leftrightarrow\begin{array}{rrr|r}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\end{array}$$

Es gibt also nur die eine Lösung (0 | 0 | 0). Das bedeutet:
1. Interpretation: es gibt nur die triviale Lösung, d.h. die Vektoren sind linear unabhängig.
2. Interpretation: die 3 Ebenen haben nur den Ursprung gemeinsam

13. 1. Interpretation: Untersuchung von $\begin{pmatrix}13\\-2\\-7\end{pmatrix}$ als Linearkombination von $\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}-1\\4\\2\end{pmatrix}$.

2. Interpretation: 3 Ebenen, die nicht den Ursprung enthalten, in einem Gleichungssystem, d.h. gesucht sind gemeinsame Punkte aller 3 Ebenen.

$$\begin{array}{rrr|r}3&2&-1&13\\2&1&4&-2\\1&-1&2&-7\end{array}\begin{array}{l}\ \\2\cdot\text{I}-3\cdot\text{II}\\\text{I}-3\cdot\text{III}\end{array}\Leftrightarrow\begin{array}{rrr|r}3&2&-1&13\\0&1&-14&32\\0&5&-7&34\end{array}\begin{array}{l}\text{I}-2\cdot\text{II}\\\ \\\text{III}-5\cdot\text{II}\end{array}\Leftrightarrow\begin{array}{rrr|r}3&0&27&-51\\0&1&-14&32\\0&0&63&-126\end{array}\begin{array}{c}\text{I}-27\cdot\text{III};:3\\\text{II}+14\cdot\text{III}\\:63\end{array}\Leftrightarrow\begin{array}{rrr|r}1&0&0&1\\0&1&0&4\\0&0&1&-2\end{array}$$

Es gibt also nur die eine Lösung (1 | 4 | –2). Das bedeutet:

1. Interpretation: $\begin{pmatrix}13\\-2\\-7\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}+4\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\-1\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}-1\\4\\2\end{pmatrix}$

2. Interpretation: die 3 Ebenen haben nur den Punkt (1 | 4 | –2) gemeinsam

14. Schnittpunkt S von A, B und C:

$$\begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 2 & 12 \\ 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & -1 & -1 & -6 \end{array} \begin{array}{l} \\ 2\cdot\mathrm{II}-\mathrm{I} \\ \mathrm{I}-\mathrm{III} \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rrr|r} 2 & -1 & 2 & 12 \\ 0 & 3 & -2 & -6 \\ 0 & 0 & 3 & 18 \end{array} \begin{array}{l} \mathrm{I}+\mathrm{II} \\ \mathrm{II}+2\cdot\mathrm{III} \\ \\ \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rrr|r} 2 & 2 & 0 & 6 \\ 0 & 3 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array} \begin{array}{l} :2;\ \mathrm{I}-\mathrm{II} \\ :3 \\ :63 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 6 \end{array} \Rightarrow S(1|2|6)$$

Schnittgerade g von D und E (mit anderer Methode als in 1.) (vgl. S. 192):

$$\left| \begin{array}{l} 2x_1 - x_2 = 0 \\ 2x_1 - x_2 + x_3 - 6 = 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} \mathrm{I} \\ \mathrm{II}\ \ \mathrm{II}-1 \end{array} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} x_2 = 2x_1 \\ x_3 = 6 \end{array} \right| \mathrm{II}' \qquad \text{Wähle: } x_1 = \lambda \ \Rightarrow \ x_2 = 2\lambda.$$

$$\Rightarrow \ g: \ \vec{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda \\ 2\lambda \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Achtung: Der Schnittpunkt S von A, B und C liegt auf der Schnittgeraden g von D und E.
$\Rightarrow$ Die Ebene F liegt nicht eindeutig fest. Es gibt unendlich viele Lösungen der Aufgabe.
Es ist aber nur eine Gleichung gefragt, also z.B.:

$$F: \ \vec{X} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

15. Verschiedene Wege möglich,
z.B.: Schnittpunkt von A, B und C ermitteln und in D überprüfen:

$$\begin{array}{rrr|r} 2 & -3 & 1 & 3 \\ 5 & -1 & 0 & 5 \\ 0 & 3 & -2 & -2 \end{array} \begin{array}{l} \\ 2\cdot\mathrm{II}-5\cdot\mathrm{I} \\ \\ \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rrr|r} 2 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & 13 & -5 & -5 \\ 0 & 3 & -2 & -2 \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ 2\cdot\mathrm{II}-13\cdot\mathrm{III} \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rrr|r} 2 & -3 & 1 & 3 \\ 0 & 13 & -5 & -5 \\ 0 & 0 & 16 & 16 \end{array} \begin{array}{l} \mathrm{I}+3\cdot\mathrm{II}-\mathrm{III};\ :2 \\ \mathrm{II}+5\cdot\mathrm{III};\ :13 \\ :16 \end{array} \Leftrightarrow \begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}$$

$\Rightarrow$ A, B und C haben einen gemeinsamen Punkt: S(1 | 0 | 1).
Dieser liegt auch in D, da 1 + 0 – 1 = 0, ist also gemeinsamer Punkt (Schnittpunkt) aller vier Ebenen.