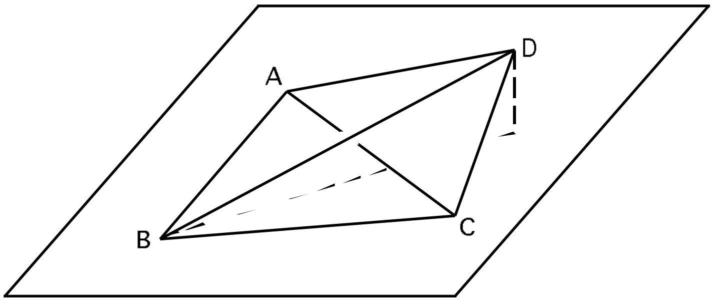
# Lösung zum Aufgabenblatt: Lage von Geraden, Nr. 40 und 41

40. Drei Punkte liegen immer auf einer Ebene. Wenn der vierte Punkt des Vierecks in der Ebene der drei anderen liegt, schneiden sich die beiden Diagonalen. Wenn er außerhalb der Ebene liegt, dann nicht (vgl. Skizze).




AC: $\vec{X} = \vec{A} + \lambda^* \cdot \overrightarrow{AC}$

$$\vec{X} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda^* \cdot \begin{pmatrix} 15 \\ -10 \\ 20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

BD: $\vec{X} = \vec{B} + \mu^* \cdot \overrightarrow{BD} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu^* \cdot \begin{pmatrix} -6 \\ 3 \\ 18 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$

Schnittpunkt?

$$\begin{pmatrix} -5 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} -5 + 3\lambda = 6 - 2\mu \\ 4 - 2\lambda = -3 + \mu \\ -2 + 4\lambda = 4 + 6\mu \end{array} \right| \begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \quad 2 \cdot \text{II} + \text{III} \\ \text{III} \quad \text{II}' \text{ in III} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{l} -5 + 3\lambda = 6 - 2\mu \\ 6 = -2 + 8\mu \\ -2 + 4\lambda = 4 + 6 \end{array} \right| \begin{array}{l} \text{II}', \text{III}' \text{ in I} \\ \text{II}' \\ \text{III}' \end{array} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{c} -5 + 3 \cdot 3 = 6 - 2 \\ \mu = 1 \\ \lambda = 3 \end{array} \right| \begin{array}{l} \text{wahr} \\ \text{II}' \\ \text{III}' \end{array}$$

$\Rightarrow$ Schnittpunkt S(4|–2|10) (mit $\lambda = 3$ in AC oder mit $\mu = 1$ in BD)

$\Rightarrow$ das Viereck ist eben.

41.

a) Alle Geraden dieser Schar gehen durch den Punkt (1|2|3), aber mit unterschiedlichen Richtungsvektoren.Diese Richtungsvektoren sind parallel zu einer Ebene, die durch $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (also senkrecht zur $x_2x_3$-Ebene) aufgespannt wird.

b) $$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} t \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{c} 1 + t \cdot \lambda = 1 + 2\mu \\ 2 + 2\lambda = -2 + 2\mu \\ 3 + \lambda = 1 - 2\mu \end{array} \right| \begin{array}{l} \text{I} \\ \text{II} \quad \text{II} + \text{III} \\ \text{III} \quad \text{II}' \text{ in III} \end{array} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{c} 1 + t \cdot \lambda = 1 + 2\mu \\ 5 + 3\lambda = -1 \\ 3 - 2 = 1 - 2\mu \end{array} \right| \begin{array}{l} \text{II}', \text{III}' \text{ in I} \\ \text{II}' \\ \text{III}' \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left| \begin{array}{c} 1 + t \cdot (-2) = 1 \\ \lambda = -2 \\ \mu = 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} \text{I}' \\ \\ \\ \end{array} \Leftrightarrow \left| \begin{array}{c} t = 0 \\ \lambda = -2 \\ \mu = 0 \end{array} \right| \begin{array}{l} \text{I}' \\ \\ \\ \end{array}$$

Also $t_s = 0$. Der Schnittpunkt von $g_0$ und h ist (1|–2|1).

c) z.B. echt parallel zur Ebene durch (1|2|3), die parallel zur in a beschriebenen Ebene ist.

z.B. $\vec{X} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$