Lösung zum Aufgabenblatt: Lage von Geraden, Nr. 38 & 39

38.

a) Parallel? $\begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix}=\lambda\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\-6\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left|\begin{matrix}1=2\lambda\\-3=2\lambda\\1=-6\lambda\end{matrix}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{matrix}\lambda=\frac{1}{2}\\\lambda=-\frac{3}{2}\\\lambda=-\frac{1}{6}\end{matrix}\right|$ Widerspruch $\Rightarrow$ g, h nicht parallel.

Schnittpunkt? (Strategie: λ, μ mit 2 Gleichungen bestimmen und in der 3. testen)

$$\begin{pmatrix}-7\\2\\1\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\-3\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-8\\-1\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\-6\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left|\begin{matrix}-7+\lambda=1+2\mu\\2-3\lambda=-8+2\mu\\1+\lambda=-1-6\mu\end{matrix}\right|\begin{matrix}\text{I III}-\text{I}\\\text{II}\\\text{III}\end{matrix} \Leftrightarrow \left|\begin{matrix}8=-2-8\mu\\2-3\lambda=-8+2\mu\\1+\lambda=-1-6\mu\end{matrix}\right|\begin{matrix}\text{I}'\\\text{I}',\text{III}'\text{ in II}\\\text{I}'\text{ in III}\end{matrix}$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{matrix}\mu=-\frac{5}{4}\\2-\frac{33}{2}=-8-\frac{5}{2}\\1+\lambda=-1+\frac{15}{2}\end{matrix}\right|\begin{matrix}\\\text{II}'\\\text{III}'\end{matrix} \Leftrightarrow \left|\begin{matrix}\mu=-\frac{5}{4}\\-\frac{29}{2}=-\frac{21}{2}\\\lambda=\frac{11}{2}\end{matrix}\right|$$ Widerspruch $\Rightarrow$ g, h sind windschief.

b) Parallel? $\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}=\lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left|\begin{matrix}2=\lambda\\1=0\\1=\lambda\end{matrix}\right|$ Widerspruch $\Rightarrow$ g, h nicht parallel.

Schnittpunkt?

$$\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left|\begin{matrix}1+2\lambda=-2+\mu\\1+\lambda=0\\3+\lambda=1+\mu\end{matrix}\right|\begin{matrix}\text{I II,III}'\text{ in I}\\\text{II}\\\text{III II in III}\end{matrix} \Leftrightarrow \left|\begin{matrix}1-2=-2+1\\\lambda=-1\\\mu=1\end{matrix}\right|\begin{matrix}\text{I}'\text{ wahr}\\\\\text{III}'\end{matrix}$$

$\vec{S}=\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}-1\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$ oder $\vec{S}=\begin{pmatrix}-2\\0\\1\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ g, h schneiden sich in S(–1|0|2)

c) Parallel? $\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}=\lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left|\begin{matrix}2=\lambda\\1=0\\1=0\end{matrix}\right|$ Widerspruch $\Rightarrow$ g, h nicht parallel.

Schnittpunkt?

$$\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left|\begin{matrix}2+2\lambda=\mu\\1+\lambda=0\\3+\lambda=0\end{matrix}\right|\begin{matrix}\text{I}\\\text{II}\\\text{III}\end{matrix} \Leftrightarrow \left|\begin{matrix}2+2\lambda=\mu\\\lambda=-1\\\lambda=-3\end{matrix}\right|$$ Widerspr. $\Rightarrow$ g, h windschief.

d) Parallel? $\begin{pmatrix}-3\\5\\1\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}6\\-10\\-2\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ g, h sind parallel. Echt parallel oder gleich? z.B. $A_h \in g$?

$$\begin{pmatrix}-3\\5\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-2\\1\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}-3\\5\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left|\begin{matrix}-3=2-3\lambda\\5=-2+5\lambda\\1=1+\lambda\end{matrix}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{matrix}\lambda=\frac{5}{3}\\\lambda=\frac{7}{5}\\\lambda=0\end{matrix}\right|$$ $\Rightarrow$ $A_h \notin g$ $\Rightarrow$ g, h echt parallel

39. Parallel? $\begin{pmatrix}3\\0\\-5\end{pmatrix}=-\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-6\\0\\10\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ g, h sind parallel. Echt parallel oder gleich? z.B. $A_h \in g$?

$$\begin{pmatrix}7\\1\\-13\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}3\\0\\-5\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left|\begin{matrix}7=-2+3\lambda\\1=1\\-13=2-5\lambda\end{matrix}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{matrix}\lambda=3\\1=1\\\lambda=3\end{matrix}\right|$$ $\Rightarrow$ $A_h \in g$ $\Rightarrow$ g = h

Gleiche Punkte bedeutet: $\vec{X}$ ist in g und h derselbe Vektor. $\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix}-2\\1\\2\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}3\\0\\-5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7\\1\\-13\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}-6\\0\\10\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left|\begin{matrix}-2+3\lambda=7-6\mu\\1=1\\2-5\lambda=-13+10\mu\end{matrix}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{matrix}\lambda=3-2\mu\\1=1\\\lambda=3-2\mu\end{matrix}\right|$$

d.h.: für $\lambda=3-2\mu$ bekommt man dieselben Punkte (mit λ in g bzw. μ in h).