Lösungen zum Aufgabenblatt: Ebenen

44. Da man schon weiß, dass es genau einen Schnittpunkt geben soll, kann man gleich mit dem Ansatz zur Bestimmung von Schnittpunkten anfangen. Für den Schnittpunkt mit F gilt:

$$\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}3\\7\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\-7\\-1\end{pmatrix}+\nu\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}1+2\lambda+3\mu=4+2\nu\\ 2\lambda+7\mu=-7-\nu\\ 3+\lambda+5\mu=-1\end{array}\right| \begin{array}{l}\mathrm{I}+2\cdot\mathrm{II}\\ \\ |\cdot 6\end{array} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}1+6\lambda+17\mu=-10\\ 2\lambda+7\mu=-7-\nu\\ 18+6\lambda+30\mu=-6\end{array}\right| \begin{array}{l}\mathrm{I}'\\ \\ |\ \mathrm{III}-\mathrm{I}'\end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}1+6\lambda+17\mu=-10\\ 2\lambda+7\mu=-7-\nu\\ 17+13\mu=4\end{array}\right| \begin{array}{l}\mathrm{III}'\text{ in }\mathrm{I}'\\ \\ \mathrm{III}'\end{array} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}1+6\lambda-17=-10\\ 2\lambda+7\mu=-7-\nu\\ \mu=-1\end{array}\right| \begin{array}{l}\mathrm{I}''\\ \mathrm{III}',\mathrm{I}''\text{ in }\mathrm{II}\\ \end{array} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}\lambda=1\\ 2-7=-7-\nu\\ \mu=-1\end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}\lambda=1\\ \nu=-2\\ \mu=-1\end{array}\right|$$

Damit bekommt man den Ortsvektor des Schnittpunkts entweder mit F oder mit g:

mit F: $\vec{S}=\begin{pmatrix}1\\0\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\2\\1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\7\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-5\\-1\end{pmatrix}$ mit g: $\vec{S}=\begin{pmatrix}4\\-7\\-1\end{pmatrix}-2\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-5\\-1\end{pmatrix}$

Und damit ist der Schnittpunkt: S(0|–5|–1) *(nicht vergessen, den <u>Punkt</u> anzugeben!)*

45. a) x_1-Achse: $\vec{X}=\nu\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ Damit folgt der Ansatz: $\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}8\\0\\5\end{pmatrix}=\nu\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}-2+3\lambda+8\mu=\nu\\ 1+\lambda=0\\ 3+3\lambda+5\mu=0\end{array}\right| \begin{array}{l}\\ \\ \mathrm{II}\text{ in }\mathrm{III}\end{array} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}-2+3\lambda+8\mu=\nu\\ \lambda=-1\\ 3-3+5\mu=0\end{array}\right| \begin{array}{l}\mathrm{II},\mathrm{III}'\text{ in }\mathrm{I}\\ \\ \mathrm{III}'\end{array} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}-2-3=\nu\\ \lambda=-1\\ \mu=0\end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}\nu=-5\\ \lambda=-1\\ \mu=0\end{array}\right|$$

$$\Rightarrow \vec{S}=\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}8\\0\\5\end{pmatrix}=(-5)\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Und damit ist der Schnittpunkt: S(–5|0|0).

x_2-Achse: $\vec{X}=\nu\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ Damit folgt der Ansatz: $\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}8\\0\\5\end{pmatrix}=\nu\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}-2+3\lambda+8\mu=0\\ 1+\lambda=\nu\\ 3+3\lambda+5\mu=0\end{array}\right| \begin{array}{l}\\ \\ \mathrm{III}-\mathrm{I}\end{array} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}-2+3\lambda+8\mu=0\\ 1+\lambda=\nu\\ 5-3\mu=0\end{array}\right| \begin{array}{l}\mathrm{III}'\text{ in }\mathrm{I}\\ \\ \mathrm{III}'\end{array} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}-2+3\lambda+\frac{40}{3}=0\\ 1+\lambda=\nu\\ \mu=\frac{5}{3}\end{array}\right| \begin{array}{l}\mathrm{I}'\\ \mathrm{I}'\text{ in }\mathrm{II}\\ \end{array} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}\lambda=-\frac{34}{9}\\ \nu=-\frac{25}{9}\\ \mu=\frac{5}{3}\end{array}\right|$$

$$\Rightarrow \vec{S}=\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}-\frac{34}{9}\cdot\begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix}+\frac{5}{3}\cdot\begin{pmatrix}8\\0\\5\end{pmatrix}=-\frac{25}{9}\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\-\frac{25}{9}\\0\end{pmatrix}.$$

Damit ist der Schnittpunkt: $S(0|-\frac{25}{9}|0)$.

x_3-Achse: $\vec{X}=\nu\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$ Damit folgt der Ansatz: $\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}8\\0\\5\end{pmatrix}=\nu\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}-2+3\lambda+8\mu=0\\ 1+\lambda=0\\ 3+3\lambda+5\mu=\nu\end{array}\right| \begin{array}{l}\mathrm{II}\text{ in }\mathrm{I}\\ \\ \end{array} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}-2-3+8\mu=0\\ \lambda=-1\\ 3+3\lambda+5\mu=\nu\end{array}\right| \begin{array}{l}\mathrm{I}'\\ \\ \mathrm{I}',\mathrm{II}\text{ in }\mathrm{III}\end{array} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}\mu=\frac{5}{8}\\ \lambda=-1\\ 3-3+5\cdot\frac{5}{8}=\nu\end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}\mu=\frac{5}{8}\\ \lambda=-1\\ \nu=\frac{25}{8}\end{array}\right|$$

$$\Rightarrow \vec{S}=\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix}+\frac{5}{8}\cdot\begin{pmatrix}8\\0\\5\end{pmatrix}=\frac{25}{8}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\\frac{25}{8}\end{pmatrix}.$$

Und damit ist der Schnittpunkt: $S(0|0|\frac{25}{8})$.

b) Die Gerade parallel zur x_3-Achse durch (–4|3|0) ist: $\vec{X}=\begin{pmatrix}-4\\3\\0\end{pmatrix}+\nu\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

Der gesuchte Punkt ist der Schnittpunkt dieser Geraden mit E.

$$\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}8\\0\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\3\\0\end{pmatrix}+\nu\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}-2+3\lambda+8\mu=-4\\ 1+\lambda=3\\ 3+3\lambda+5\mu=\nu\end{array}\right| \begin{array}{l}\mathrm{II}\text{ in }\mathrm{I}\\ \\ \end{array} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}-2+6+8\mu=-4\\ \lambda=2\\ 3+3\lambda+5\mu=\nu\end{array}\right| \begin{array}{l}\mathrm{I}'\\ \\ \mathrm{I}',\mathrm{II}\text{ in }\mathrm{III}\end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}\mu=-1\\ \lambda=2\\ 3+6-5=\nu\end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}\mu=-1\\ \lambda=2\\ \nu=4\end{array}\right| \Rightarrow \vec{S}=\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix}-1\cdot\begin{pmatrix}8\\0\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\3\\0\end{pmatrix}+4\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-4\\3\\4\end{pmatrix}$$

Der gesuchte Punkt ist: S(–4|3|4).

c) Der allgemeine Ansatz für einen Punkt mit 3 gleichen Koordinaten ist: P(x|x|x).
Nun wird untersucht, ob ein solchert Punkt auf der Ebene E liegt:

$$\begin{pmatrix}x\\x\\x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}8\\0\\5\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}x=-2+3\lambda+8\mu\\x=1+\lambda\\x=3+3\lambda+5\mu\end{array}\right| \text{ II in I} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}x=-2+3(x-1)+8\mu\\\lambda=x-1\\x=3+3\lambda+5\mu\end{array}\right| \begin{array}{l}\text{I}'\\ \\ \text{I}',\text{II in III}\end{array}$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}\mu=\frac{-2x+5}{8}\\\lambda=x-1\\x=3+3(x-1)+5\cdot\frac{-2x+5}{8}\end{array}\right| \text{III}' \ |\cdot 8 \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}\mu=\frac{-2x+5}{8}\\\lambda=x-1\\8x=24+24(x-1)+5\cdot(-2x+5)\end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}\mu=\frac{-2x+5}{8}\\\lambda=x-1\\8x=14x+25\end{array}\right|$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}\mu=\frac{-2x+5}{8}\\\lambda=x-1\\x=-\frac{25}{6}\end{array}\right| \begin{array}{l}\text{III}' \text{ in I}'\\\text{III}' \text{ in II}'\end{array} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}\mu=\frac{5}{3}\\\lambda=-\frac{31}{6}\\x=-\frac{25}{6}\end{array}\right| \qquad \text{Probe: } \vec{P}=\begin{pmatrix}-2\\1\\3\end{pmatrix}-\frac{31}{6}\cdot\begin{pmatrix}3\\1\\3\end{pmatrix}+\frac{5}{3}\cdot\begin{pmatrix}8\\0\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-\frac{25}{6}\\-\frac{25}{6}\\-\frac{25}{6}\end{pmatrix}$$

Der gesuchte Punkt ist: $P(-\frac{25}{6}|-\frac{25}{6}|-\frac{25}{6})$.

46. Die x_1x_2-Ebene hat die Koordinatengleichung: $x_3=0$.

Die Gerade ist: g: $\vec{X}=\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}-6\\0\\4\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}x_1=1-6\lambda\\x_2=3\\x_3=-2+4\lambda\end{array}\right|$

Den Schnittpunkt findet man durch Einsetzen der Koordinatengleichungen der Geraden für die Koordinaten in der Koordinatengleichung der Ebene:

$-2+4\lambda=0 \quad\Rightarrow\quad \lambda=\frac{1}{2}$.

Damit folgt für den Ortsvektor des Spurpunkts: $\vec{S}_3=\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}+\frac{1}{2}\cdot\begin{pmatrix}-6\\0\\4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix} \quad\Rightarrow\quad S_3(-2|3|0)$

Die x_1x_3-Ebene hat die Koordinatengleichung: $x_2=0$.

Analog setzt man für x_2 die entsprechende Koordinatengleichung der Geraden ein und erhält: 3 = 0.

Dies ist ein Widerspruch. Daraus folgt, dass es keinen Spurpunkt mit der x_1x_3-Ebene gibt. g liegt also parallel zu ihr. Dies hätte man bereits aus dem Richtungsvektor schließen können.

47. a) $\vec{X}=\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}0\\6\\0\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}x_1=-2\mu\\x_2=1+6\lambda+3\mu\\x_3=0\end{array}\right|$

Wählt man μ beliebig, bekommt man ein beliebiges x_1. Wählt man nun λ beliebig, erhält man ein beliebiges x_2. Die Werte von x_1 und x_2 können also auf dieser Ebene ganz beliebig gewählt werden. Die einzige Bedingung für alle Punkte auf dieser Ebene ist also, daß die dritte Koordinate 0 sein muß. Es handelt sich also um die x_1x_2-Ebene und ihre Koordinatengleichung ist: $x_3=0$.

b) $\vec{X}=\begin{pmatrix}-1\\4\\2\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}3\\2\\0\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}x_1=-1+\lambda+3\mu\\x_2=4-\lambda+2\mu\\x_3=2+3\lambda\end{array}\right| \text{III in I} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}x_1=-1+\frac{x_3-2}{3}+3\mu\\x_2=4-\lambda+2\mu\\\lambda=\frac{x_3-2}{3}\end{array}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l}\mu=\frac{1}{3}\left(x_1+1-\frac{x_3-2}{3}\right)\\x_2=4-\lambda+2\mu\\\lambda=\frac{x_3-2}{3}\end{array}\right|$

Die Koordinatengleichung der Ebene bekommt man, wenn man λ und μ in der zweiten Gleichung ersetzt:

$$x_2=4-\frac{x_3-2}{3}+2\cdot\frac{1}{3}\left(x_1+1-\frac{x_3-2}{3}\right) \quad |\cdot 9 \qquad \Leftrightarrow \quad 9x_2=36-3(x_3-2)+6\left(x_1+1-\frac{x_3-2}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad 9x_2=36-3x_3+6+6x_1+6-2(x_3-2) \quad\Leftrightarrow\quad 9x_2=36-3x_3+6+6x_1+6-2x_3+4$$

Und damit folgt die Ebenengleichung in Koordinatenform: $6x_1-9x_2-5x_3+52=0$

48. a) E ist parallel zur x_1x_3-Ebene, um 2 Einheiten in der $+x_2$-Richtung verschoben.
b) E ist die x_2x_3-Ebene.

49. Die Schnittgerade ist die Menge aller gemeinsamen Punkte. Also für entsprechende Parameterwerte muss bei beiden Ebenengleichungen dasselbe herauskommen.

Ansatz: $\begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}-2\\0\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix}+\sigma\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}+\tau\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}$

Vorgehen: 2 der 3 Gleichungen nach den Parametern <u>einer</u> Ebenengleichung auflösen, also hier entweder nach λ und μ <u>oder</u> nach σ und τ. Dann in die 3. Gleichung einsetzen. Hierdurch werden die Parameter einer Ebene in der 3. Gleichung eliminiert.
Da in diesem Fall σ in den ersten beiden Gleichungen nicht vorkommt, kann man σ in der 3. Gleichung nicht ersetzen. Deshalb werden hier die ersten beiden Gleichungen nach λ und μ aufgelöst:

$$\left|\begin{matrix}4-2\mu=-2+2\tau\\-\lambda=3-\tau\\-3+3\mu=-\sigma+3\tau\end{matrix}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{matrix}\mu=3-\tau\\\lambda=-3+\tau\\-3+3\mu=-\sigma+3\tau\end{matrix}\right| \text{ I in III} \Leftrightarrow \left|\begin{matrix}\mu=3-\tau\\\lambda=-3+\tau\\-3+3(3-\tau)=-\sigma+3\tau\end{matrix}\right|$$

$$\Leftrightarrow \left|\begin{matrix}\mu=3-\tau\\\lambda=-3+\tau\\6-3\tau=-\sigma+3\tau\end{matrix}\right| \Leftrightarrow \left|\begin{matrix}\mu=3-\tau\\\lambda=-3+\tau\\\sigma=-6+6\tau\end{matrix}\right|$$

Interpretation: Für Punkte auf F, die auch auf E liegen, muss gelten: $\sigma=-6+6\tau$.
Wenn man diese Bedingung in die Gleichung von F einsetzt, bekommt man die Gleichung der Schnittgeraden s:

$$\vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix}+(-6+6\tau)\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}+\tau\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix}-6\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}+6\tau\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}+\tau\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\3\\6\end{pmatrix}+\tau\cdot\left[\begin{pmatrix}0\\0\\-6\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}\right]$$

$$\Rightarrow \quad s: \quad \vec{x}=\begin{pmatrix}-2\\3\\6\end{pmatrix}+\tau\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\-3\end{pmatrix}$$

Probe: $\begin{pmatrix}-2\\3\\6\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix}-3\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}+3\cdot\begin{pmatrix}-2\\0\\3\end{pmatrix}$. Damit liegt der Aufhänger von s auch in E.

$\begin{pmatrix}2\\-1\\-3\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}-1\cdot\begin{pmatrix}-2\\0\\3\end{pmatrix}$.

Damit ist der Richtungsvektor von s eine Linearkombination der Spannvektoren von E. Damit folgt, daß die Gerade s, deren Gleichung wir aus der Ebene F gewonnen haben, auch in der Ebene E liegt. Es ist also die Schnittgerade von E und F.

2. Weg: eine Ebene in die Koordinatenform umwandeln, z.B. F:

$$F: \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2\\3\\0\end{pmatrix}+\sigma\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\-1\end{pmatrix}+\tau\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left|\begin{matrix}x_1=-2\quad+2\tau\\x_2=3\quad-\tau\\x_3=\quad-\sigma+3\tau\end{matrix}\right|\begin{matrix}\text{I}\\\text{II}\\\text{III}\end{matrix} \underset{\text{I}+2\text{II}}{\Rightarrow} x_1+2x_2=4\Leftrightarrow x_1+2x_2-4=0$$

Dann die andere Ebene hier einsetzen:

$$E: \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}+\mu\cdot\begin{pmatrix}-2\\0\\3\end{pmatrix}\Leftrightarrow\left|\begin{matrix}x_1=4\quad-2\mu\\x_2=\quad-\lambda\\x_3=-3\quad+3\mu\end{matrix}\right| \text{ in F: } 4-2\mu-2\lambda-4=0 \Leftrightarrow \mu=-\lambda$$

Dies wird (wie beim ersten Weg) für s in die dazugehörige Ebenengleichung eingesetzt:

$$s: \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix}-\lambda\cdot\begin{pmatrix}-2\\0\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\0\\-3\end{pmatrix}+\lambda\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\-3\end{pmatrix}$$ (Dies ist dieselbe Gerade wie oben.)

<u>Anmerkung:</u>
Sollten beide Ebenen in Koordinatenform vorliegen, muss eine erst in die Parameterform umgewandelt werden.