Lösungen zum Aufgabenblatt: Basis eines Vektorraums

17. a) Sind $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ und $\vec{a}_3$ linear unabhängig? Untersuchung mit Hilfe der Nullsumme:

$\lambda_1 \cdot (1 \mid 2 \mid 0) + \lambda_2 \cdot (-1 \mid 3 \mid 1) + \lambda_3 \cdot (1 \mid -13 \mid -3) = (0 \mid 0 \mid 0) \;\Leftrightarrow$

$$\left|\begin{array}{l} \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 3\lambda_2 - 13\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 \end{array}\right|\begin{array}{l} \mathrm{I} \quad \mathrm{I}+\mathrm{III} \\ \mathrm{II} \quad \mathrm{II}-3\cdot\mathrm{III} \\ \mathrm{III} \end{array} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} \lambda_1 - 2\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 - 4\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 \end{array}\right|\begin{array}{l} \mathrm{I}' \\ \mathrm{II}' \\ \end{array} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} \lambda_1 - 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_1 - 2\lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 - 3\lambda_3 = 0 \end{array}\right|$$

Da I‘ und II‘ gleich sind, gibt es keine eindeutige sondern viele Lösungen, z.B.:
$\lambda_1 = 2$; $\lambda_2 = 3$; $\lambda_3 = 1$ ist eine nicht-triviale Lösung. $\Rightarrow$ $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ und $\vec{a}_3$ sind linear abhängig und bilden keine Basis. (Die zweite Eigenschaft der Basis muss also für diese Frage nicht mehr untersucht werden.)

b) Ansatz: $(a \mid b \mid c) = \lambda_1 \cdot (1 \mid 2 \mid 0) + \lambda_2 \cdot (-1 \mid 3 \mid 1) + \lambda_3 \cdot (1 \mid -13 \mid -3) \;\Leftrightarrow$

$$\left|\begin{array}{l} a = \lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3 \\ b = 2\lambda_1 + 3\lambda_2 - 13\lambda_3 \\ c = \lambda_2 - 3\lambda_3 \end{array}\right|\begin{array}{l} \mathrm{I} \quad \mathrm{I}+\mathrm{III} \\ \mathrm{II} \quad \mathrm{II}-3\cdot\mathrm{III} \\ \mathrm{III} \end{array} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} a + c = \lambda_1 - 2\lambda_3 \\ b - 3c = 2\lambda_1 - 4\lambda_3 \\ c = \lambda_2 - 3\lambda_3 \end{array}\right|\begin{array}{l} \mathrm{I}' \quad 2\cdot\mathrm{I}-\mathrm{II} \\ \mathrm{II}' \\ \end{array} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 2a + 2c - b + 3c = 0 \\ b - 3c = 2\lambda_1 - 4\lambda_3 \\ c = \lambda_2 - 3\lambda_3 \end{array}\right|\begin{array}{l} \mathrm{I}'' \\ \\ \end{array}$$

I“ gibt die gesuchte Bedingung. Es lassen sich alle die Vektoren darstellen, für die gilt: $2a - b + c = 0$.

18. a) Da $\mathbb{U}$ durch zwei Vektoren aufgespannt wird, kann dim $\mathbb{U}$ höchstens 2, also 1 oder 2 sein. Die Dimension wäre 1, wenn $\vec{b}_1$ und $\vec{b}_2$ linear abhängig sind. Dies ist bei zwei Vektoren nur möglich, wenn einer ein Vielfaches vom anderen ist *(warum?)*.

Ansatz: $\vec{b}_1 = \lambda \cdot \vec{b}_2 \;\Leftrightarrow\; (2 \mid -1 \mid -4) = \lambda \cdot (-3 \mid 0 \mid 2) \;\Leftrightarrow\; \left|\begin{array}{l} 2 = -3\lambda \\ -1 = 0 \\ -4 = 2\lambda \end{array}\right|\begin{array}{l} \mathrm{I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \end{array}$

Widerspruch in II $\Rightarrow$ $\vec{b}_1$ und $\vec{b}_2$ sind lin. unabh. und bilden eine Basis. $\Rightarrow$ dim $\mathbb{U} = 2$.

b) $\vec{a}_1$: $\vec{a}_1 = \lambda_1 \cdot \vec{b}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{b}_2 \;\Leftrightarrow\; (0 \mid -3 \mid -8) = \lambda_1 \cdot (2 \mid -1 \mid -4) + \lambda_2 \cdot (-3 \mid 0 \mid 2) \;\Leftrightarrow$

$$\left|\begin{array}{l} 0 = 2\lambda_1 - 3\lambda_2 \\ -3 = -\lambda_1 \\ -8 = -4\lambda_1 + 2\lambda_2 \end{array}\right|\begin{array}{l} \mathrm{I} \quad \mathrm{II\ in\ I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \quad \mathrm{II\ in\ III} \end{array} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 0 = 6 - 3\lambda_2 \\ \lambda_1 = 3 \\ -8 = -12 + 2\lambda_2 \end{array}\right|\begin{array}{l} \mathrm{I}' \\ \\ \mathrm{III}' \end{array} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} \lambda_2 = 2 \\ \lambda_1 = 3 \\ \lambda_2 = 2 \end{array}\right| \;\Rightarrow\; \vec{a}_1 \in \mathbb{U}$$

$\vec{a}_2$: $\vec{a}_2 = \lambda_1 \cdot \vec{b}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{b}_2 \;\Leftrightarrow\; (-1 \mid -1 \mid 3) = \lambda_1 \cdot (2 \mid -1 \mid -4) + \lambda_2 \cdot (-3 \mid 0 \mid 2) \;\Leftrightarrow$

$$\left|\begin{array}{l} -1 = 2\lambda_1 - 3\lambda_2 \\ -1 = -\lambda_1 \\ 3 = -4\lambda_1 + 2\lambda_2 \end{array}\right|\begin{array}{l} \mathrm{I} \quad \mathrm{II\ in\ I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \quad \mathrm{II\ in\ III} \end{array} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} -1 = 2 - 3\lambda_2 \\ \lambda_1 = 1 \\ 3 = -4 + 2\lambda_2 \end{array}\right|\begin{array}{l} \mathrm{I}' \\ \\ \mathrm{III}' \end{array} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} \lambda_2 = 1 \\ \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 3{,}5 \end{array}\right| \;\Rightarrow\; \vec{a}_2 \notin \mathbb{U}$$

$\vec{a}_3$: $\vec{a}_3 = \lambda_1 \cdot \vec{b}_1 + \lambda_2 \cdot \vec{b}_2 \;\Leftrightarrow\; (1 \mid 0 \mid 0) = \lambda_1 \cdot (2 \mid -1 \mid -4) + \lambda_2 \cdot (-3 \mid 0 \mid 2) \;\Leftrightarrow$

$$\left|\begin{array}{l} 1 = 2\lambda_1 - 3\lambda_2 \\ 0 = -\lambda_1 \\ 0 = -4\lambda_1 + 2\lambda_2 \end{array}\right|\begin{array}{l} \mathrm{I} \quad \mathrm{II\ in\ I} \\ \mathrm{II} \\ \mathrm{III} \quad \mathrm{II\ in\ III} \end{array} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 1 = -3\lambda_2 \\ \lambda_1 = 0 \\ 0 = 2\lambda_2 \end{array}\right|\begin{array}{l} \mathrm{I}' \\ \\ \mathrm{III}' \end{array} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} \lambda_2 = -\frac{1}{3} \\ \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 0 \end{array}\right| \;\Rightarrow\; \vec{a}_3 \notin \mathbb{U}$$

19. Entweder ausführlich mit Gleichungssystem oder direkt mit scharfen Hinsehen findet man:

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} - 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ und } \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \text{ sind linear abhängig.}$$

Weiterhin gilt: $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sind lin. unabhängig, da sie nicht Vielfache voneinander sind.

$\Rightarrow$ $\mathbb{U}$ ist nicht $\mathbb{V}$ und dim $\mathbb{U} = 2$

20. a) $\vec{a} = -2 \cdot (1 \,|\, 0 \,|\, 0) + 5 \cdot (0 \,|\, 1 \,|\, 0) + 3 \cdot (0 \,|\, 0 \,|\, 1) \quad \Rightarrow \quad \vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$

$\vec{b} = a \cdot (1 \,|\, 0 \,|\, 0) + b \cdot (0 \,|\, 1 \,|\, 0) + c \cdot (0 \,|\, 0 \,|\, 1) \quad \Rightarrow \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$

b) $\vec{a} = (-2 \,|\, 5 \,|\, 3) = a_1 \cdot (1 \,|\, 1 \,|\, 1) + a_2 \cdot (1 \,|\, 1 \,|\, 0) + a_3 \cdot (1 \,|\, 0 \,|\, 0) \quad \Leftrightarrow$

$$\left|\begin{array}{l} -2 = a_1 + a_2 + a_3 \\ 5 = a_1 + a_2 \\ 3 = a_1 \end{array}\right| \begin{array}{l} \mathrm{I} \\ \mathrm{II\ III\ in\ II} \\ \mathrm{III} \end{array} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} -2 = a_1 + a_2 + a_3 \\ 2 = a_2 \\ 3 = a_1 \end{array}\right| \begin{array}{l} \mathrm{II', III\ in\ I} \\ \mathrm{II'} \\ \end{array} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} -7 = a_3 \\ 2 = a_2 \\ 3 = a_1 \end{array}\right| \begin{array}{l} \mathrm{I'} \\ \\ \end{array} \Rightarrow \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$\vec{b} = (a \,|\, b \,|\, c) = b_1 \cdot (1 \,|\, 1 \,|\, 1) + b_2 \cdot (1 \,|\, 1 \,|\, 0) + b_3 \cdot (1 \,|\, 0 \,|\, 0) \quad \Leftrightarrow$

$$\left|\begin{array}{l} a = b_1 + b_2 + b_3 \\ b = b_1 + b_2 \\ c = b_1 \end{array}\right| \begin{array}{l} \mathrm{I} \\ \mathrm{II\ III\ in\ II} \\ \mathrm{III} \end{array} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} a = b_1 + b_2 + b_3 \\ b - c = b_2 \\ c = b_1 \end{array}\right| \begin{array}{l} \mathrm{II', III\ in\ I} \\ \mathrm{II'} \\ \end{array} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} a - b = b_3 \\ b - c = b_2 \\ c = b_1 \end{array}\right| \begin{array}{l} \mathrm{I'} \\ \\ \end{array} \Rightarrow \vec{b} = \begin{pmatrix} c \\ b - c \\ a - b \end{pmatrix}$$

21. a) Nullsumme: $\lambda_1 \cdot \vec{a} + \lambda_2 \cdot \vec{b} + \lambda_3 \cdot \vec{c} = \vec{0} \quad \Leftrightarrow$

$$\left|\begin{array}{l} \lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 5\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \end{array}\right| \begin{array}{l} \mathrm{I} \\ \mathrm{II\ \ III\ in\ II} \\ \mathrm{III} \end{array} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} \lambda_1 + 3\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ 5\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \end{array}\right| \begin{array}{l} \mathrm{II', III\ in\ I} \\ \mathrm{II'} \\ \end{array} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} \lambda_3 = 0 \\ \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 = 0 \end{array}\right| \begin{array}{l} \mathrm{I'} \\ \\ \end{array}$$

$\Rightarrow$ die Vektoren sind linear unabhängig. Also bilden sie die Basis eines dreidimensionalen Vektorraums. Da dieser in $\mathbb{V}$ liegt, kann er also nur gleich $\mathbb{V}$ sein.

b) $\vec{d} = d_1 \cdot \vec{a} + d_2 \cdot \vec{b} + d_3 \cdot \vec{c} \quad \Leftrightarrow$

$$\left|\begin{array}{l} 0 = d_1 + 3d_2 + 2d_3 \\ -1 = 2d_1 + 5d_2 \\ 2 = d_1 \end{array}\right| \begin{array}{l} \mathrm{I} \\ \mathrm{II\ \ III\ in\ II} \\ \mathrm{III} \end{array} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} 0 = d_1 + 3d_2 + 2d_3 \\ -1 = d_2 \\ 2 = d_1 \end{array}\right| \begin{array}{l} \mathrm{II', III\ in\ I} \\ \mathrm{II'} \\ \end{array} \Leftrightarrow \left|\begin{array}{l} \frac{1}{2} = d_3 \\ -1 = d_2 \\ 2 = d_1 \end{array}\right| \begin{array}{l} \mathrm{I'} \\ \\ \end{array} \Rightarrow \vec{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Komponenten: $\quad 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad -1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \quad$ und $\quad \frac{1}{2} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

22. Wenn zwei Vektoren linear abhängig sind, ist einer ein Vielfaches vom andern. *(warum?)* Ein Vergleich der ersten Komponente ergibt, dass der gesuchte Vektor das $\left(-\frac{2}{3}\right)$-fache des gegeben ist. Also ist er: $\quad -2 \cdot \vec{b}_1 - \frac{8}{3} \cdot \vec{b}_2 + \frac{4}{3} \cdot \vec{b}_3$

23. $3 \cdot \vec{a} + 5 \cdot \vec{b} - 4 \cdot \vec{c} = \vec{0} \;\Leftrightarrow\; \vec{a} = -\frac{5}{3} \cdot \vec{b} + \frac{4}{3} \cdot \vec{c} \;\Rightarrow\; \vec{a} = \begin{pmatrix} -\frac{5}{3} \\ \frac{4}{3} \end{pmatrix}$ bezüglich der Basis $\{\vec{b}\,;\, \vec{c}\}$

$3 \cdot \vec{a} + 5 \cdot \vec{b} - 4 \cdot \vec{c} = \vec{0} \;\Leftrightarrow\; \vec{b} = -\frac{3}{5} \cdot \vec{a} + \frac{4}{5} \cdot \vec{c} \;\Rightarrow\; \vec{b} = \begin{pmatrix} -\frac{3}{5} \\ \frac{4}{5} \end{pmatrix}$ bezüglich der Basis $\{\vec{a}\,;\, \vec{c}\}$