Lösung zur Analysis S. 116 Nr. 70

a) Definitionsmenge

Nur Problem im Nenner des Exponenten: $\mathbb{D}_{g_a} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

Nullstellen

$g_a(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; x + a = 0 \;\Leftrightarrow\; x = -a$

Verhalten an den Grenzen von $\mathbb{D}_{f_a}$

$\lim\limits_{x\to\infty} (x+a)e^{\frac{a-11x}{12x}} = \lim\limits_{x\to\infty} (x+a)e^{\frac{a}{12x}-\frac{11}{12}} = \infty$ da $x+a \to \infty$ und $e^{\frac{a}{12x}-\frac{11}{12}} \to e^{-\frac{11}{12}}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} (x+a)e^{\frac{a-11x}{12x}} = \lim\limits_{x\to-\infty} (x+a)e^{\frac{a}{12x}-\frac{11}{12}} = -\infty$ da $x+a \to -\infty$ und $e^{\frac{a}{12x}-\frac{11}{12}} \to e^{-\frac{11}{12}}$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} (x+a)e^{\frac{a-11x}{12x}} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} (x+a)e^{\frac{a}{12x}-\frac{11}{12}} = \begin{cases} 0 & \text{für } a \le 0 \\ \infty & \text{für } a > 0 \end{cases}$

da: für a > 0: $x + a \to a$ (pos.) und $\frac{a}{12x} - \frac{11}{12} \to \infty \;\Rightarrow\; e^{\frac{a}{12x}-\frac{11}{12}} \to \infty$

für a = 0: $g_0(x) = xe^{-\frac{11}{12}}$ (für $x \ne 0$)

für a < 0: $x + a \to a$ (neg.) und $\frac{a}{12x} - \frac{11}{12} \to -\infty \;\Rightarrow\; e^{\frac{a}{12x}-\frac{11}{12}} \to 0$

$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} (x+a)e^{\frac{a-11x}{12x}} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ <}} (x+a)e^{\frac{a}{12x}-\frac{11}{12}} = \begin{cases} 0 & \text{für } a \ge 0 \\ -\infty & \text{für } a < 0 \end{cases}$

da: für a > 0: $x + a \to a$ (pos.) und $\frac{a}{12x} - \frac{11}{12} \to -\infty \;\Rightarrow\; e^{\frac{a}{12x}-\frac{11}{12}} \to 0$

für a = 0: $g_0(x) = xe^{-\frac{11}{12}}$ (für $x \ne 0$)

für a < 0: $x + a \to a$ (neg.) und $\frac{a}{12x} - \frac{11}{12} \to \infty \;\Rightarrow\; e^{\frac{a}{12x}-\frac{11}{12}} \to \infty$

Extrempunkte

$$g_a'(x) = 1\cdot e^{\frac{a-11x}{12x}} + (x+a)e^{\frac{a-11x}{12x}} \cdot \frac{-11\cdot 12x - (a-11x)\cdot 12}{144x^2} = e^{\frac{a-11x}{12x}} \cdot \left[1 - \frac{a(x+a)}{12x^2}\right] = \frac{12x^2 - ax - a^2}{12x^2} \cdot e^{\frac{a-11x}{12x}}$$

$$g_a'(x) = 0 \;\Rightarrow\; 12x^2 - ax - a^2 = 0 \;\Rightarrow\; x_{1;2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2 + 48a^2}}{24} = \frac{a \pm 7\cdot|a|}{24} = \begin{cases} \frac{1}{3}a \\ -\frac{1}{4}a \end{cases}$$

Für a = 0 gibt es keine Stellen mit waagerechter Tangente, da x = 0 Definitionslücke ist.

Für $a \ne 0$:

$$g_a''(x) = \frac{(24x-a)\cdot 12x^2 - \left(12x^2 - ax - a^2\right)\cdot 24x}{144x^4} \cdot e^{\frac{a-11x}{12x}} + \frac{12x^2 - ax - a^2}{12x^2} \cdot e^{\frac{a-11x}{12x}} \cdot \frac{-a}{12x^2}$$

$$= \frac{12ax^2 + 24a^2x}{144x^4} \cdot e^{\frac{a-11x}{12x}} - \frac{12ax^2 - a^2x - a^3}{144x^4} \cdot e^{\frac{a-11x}{12x}} = \frac{25a^2x + a^3}{144x^4} \cdot e^{\frac{a-11x}{12x}}$$

$$g_a''\left(\tfrac{1}{3}a\right) = \frac{\frac{25}{3}a^3 + a^3}{\frac{16}{9}a^4} \cdot e^{\frac{a - \frac{11}{3}a}{4a}} = \frac{21}{4a} \cdot e^{-\frac{2}{3}} \begin{cases} > 0 & \text{für } a > 0 \\ < 0 & \text{für } a < 0 \end{cases} \qquad g_a\left(\tfrac{1}{3}a\right) = \tfrac{4}{3}a e^{-\frac{2}{3}}$$

$$g_a''\left(-\tfrac{1}{4}a\right) = \frac{-\frac{25}{4}a^3 + a^3}{\frac{9}{16}a^4} \cdot e^{\frac{a + \frac{11}{4}a}{-3a}} = \frac{-28}{3a} \cdot e^{-\frac{5}{4}} \begin{cases} < 0 & \text{für } a > 0 \\ > 0 & \text{für } a < 0 \end{cases} \qquad g_a\left(-\tfrac{1}{4}a\right) = \tfrac{3}{4}a e^{-\frac{5}{4}}$$

Ergebnis: für a > 0: TIP$\left(\frac{1}{3}a \,\middle|\, \frac{4}{3}a e^{-\frac{2}{3}}\right)$ und HOP$\left(-\frac{1}{4}a \,\middle|\, \frac{3}{4}a e^{-\frac{5}{4}}\right)$

für a < 0: TIP$\left(-\frac{1}{4}a \,\middle|\, \frac{3}{4}a e^{-\frac{5}{4}}\right)$ und HOP$\left(\frac{1}{3}a \,\middle|\, \frac{4}{3}a e^{-\frac{2}{3}}\right)$

Flachpunkte

$g_a''(x) = 0 \;\Rightarrow\; 25a^2x + a^3 = 0$

1. Fall: a = 0: $g_a''(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{D}_{g_0}$, d.h. alle Punkte sind Flachpunkte (aber keine Wendepunkte.)

2. Fall: a ≠ 0: $25a^2x + a^3 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{-a}{25}$; $\quad g_a\left(\frac{-a}{25}\right) = \frac{24}{25}ae^{-3} \;\Rightarrow\; FP\left(-\frac{1}{25}a \,\middle|\, \frac{24}{25}ae^{-3}\right)$

Diese Flachpunkte sind auch Wendepunkte: es handelt sich um eine einfache Nullstelle von $g_a''(x)$, was Vorzeichenwechsel bedeutet.

b) Es gibt zwei Ortslinien:

1. $x = \frac{1}{3}a \;\Leftrightarrow\; a = 3x$; $\quad y = \frac{4}{3}ae^{-\frac{2}{3}} = 4e^{-\frac{2}{3}}x$

2. $x = -\frac{1}{4}a \;\Leftrightarrow\; a = -4x$; $\quad y = \frac{3}{4}ae^{-\frac{5}{4}} = -3e^{-\frac{5}{4}}x$

c) $x = -\frac{1}{25}a \;\Leftrightarrow\; a = -25x$; $\quad y = \frac{24}{25}ae^{-3} = -24e^{-3}x$

d) (Hüllkurven sind noch nicht behandelt.)

e) $g_a'(-a) = \frac{12a^2 + a^2 - a^2}{12a^2} \cdot e^{\frac{a+11a}{-12a}} = 1 \cdot e^{-1} = \frac{1}{e}$, d.h. bei allen Nullstellen ist die Steigung gleich.

f) $g_a'\left(-\frac{1}{25}a\right) = \frac{\frac{12}{625}a^2 + \frac{1}{25}a^2 - a^2}{\frac{12}{625}a^2} \cdot e^{\frac{a + \frac{11}{25}a}{-\frac{12}{25}a}} = \frac{12a^2 + 25a^2 - 625a^2}{12a^2} \cdot e^{\frac{25a+11a}{-12a}} = \frac{-588a^2}{12a^2} \cdot e^{\frac{36a}{-12a}} = -49 \cdot e^{-3} = -\frac{49}{e^3}$

Die Steigung aller Wendetangenten ist gleich.

Für sie gilt: $y = -\frac{49}{e^3}x + t$ und sie gehen jede durch einen Wendepunkt $\left(-\frac{1}{25}a \,\middle|\, \frac{24}{25}ae^{-3}\right)$

$\Rightarrow\; \frac{24}{25}ae^{-3} = -\frac{49}{e^3}\left(-\frac{1}{25}a\right) + t \;\Leftrightarrow\; t = \frac{24}{25}ae^{-3} - \frac{49}{25}ae^{-3} = -ae^{-3} = -\frac{a}{e^3}$

$\Rightarrow$ Schar der Wendetangenten: $\quad y = -\frac{49}{e^3}x - \frac{a}{e^3}$ für a ≠ 0

g) $x + a = (x+a)e^{\frac{a-11x}{12x}}$

1. Lösung: x = –a, d.h. der Schnittpunkt ist jeweils in der NS der Funktion, d.h. (–a | 0).

Die Steigung der Scharfunktion ist dort $\frac{1}{e}$. $\quad \Rightarrow \tan\alpha = \frac{1}{e} \;\Rightarrow\; \alpha \approx 20{,}2°$

Der Winkel der Geraden y = x + a mit der x-Achse beträgt 45°.

$\Rightarrow$ Der Schnittwinkel beträgt 45° – 20,2° = 24.8°.

2. Lösung: $a - 11x = 0 \;\Leftrightarrow\; x = \frac{1}{11}a$; $g_a\left(\frac{1}{11}a\right) = \left(\frac{1}{11}a + a\right)e^{\frac{a-a}{\frac{12}{11}x}} = \frac{12}{11}a$; Schnittpunkt$\left(\frac{1}{11}a \,\middle|\, \frac{12}{11}a\right)$

$g_a'\left(\frac{1}{11}a\right) = \frac{\frac{12}{121}a^2 - \frac{1}{11}a^2 - a^2}{\frac{12}{121}a^2} \cdot e^{\frac{a-a}{\frac{12}{11}a}} = \frac{12a^2 - 11a^2 - 121a^2}{12a^2} \cdot e^0 = -10$

$\Rightarrow\; \tan\alpha = -10 \;\Rightarrow\; \alpha \approx -84{,}3°$

$\Rightarrow$ Der Schnittwinkel beträgt 45° + 84,3° = 129,3°. (bzw. 180° – 129,3° = 50,7°