Lösung zur Analysis S. 116 Nr. 68e

Definitionsmenge

$\mathbb{D} = \mathbb{R}$

Symmetrie

$f_a(-x) = e^{-ax} - ae^{-x} \begin{cases} \neq f_a(x) \\ \neq -f_a(x) \end{cases} \quad \Rightarrow$ keine bekannte Symmetrie

Verhalten an den Grenzen von $\mathbb{D}_{f_a}$

$f_a(x) = e^{ax} - ae^x = e^x \cdot \left(e^{(a-1)x} - a\right); \quad f_1(x) = e^x - e^x = 0; \quad f_0(x) = e^0 - 0 = 1$

Für $x \to \infty$ gilt: $\quad e^x \to \infty; \; e^{(a-1)x} \begin{cases} \to \infty \text{ für } a > 1 \\ \to 0 \text{ für } a < 1 \end{cases}$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty} f_a(x) = \lim_{x\to\infty}\left[e^x \cdot \left(e^{(a-1)x} - a\right)\right] = \begin{cases} \infty \text{ für } a > 1 \\ 0 \text{ für } a = 1 \\ -\infty \text{ für } 0 < a < 1 \\ 1 \text{ für } a = 0 \\ \infty \text{ für } a < 0 \end{cases}$$

Für $x \to -\infty$ gilt: $\quad e^x \to 0; \; e^{ax} \begin{cases} \to 0 \text{ für } a > 0 \\ \to \infty \text{ für } a < 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \lim_{x\to-\infty} f_a(x) = \lim_{x\to-\infty}\left[e^{ax} - ae^x\right] = \begin{cases} 0 \text{ für } a > 0 \\ 1 \text{ für } a = 0 \\ \infty \text{ für } a < 0 \end{cases}$$

Schnittpunkte mit den Achsen

x-Achse: $\quad f_a(x) = 0 \;\Leftrightarrow\; e^{ax} - ae^x = 0 \;\Leftrightarrow\; e^{ax} = ae^x \;\Leftrightarrow\; e^{(a-1)x} = a$

Dies hat nur Lösungen für $a > 0$; d.h. für $a \leq 0$ gibt es keine Schnittpunkte.

Für $a > 0$ gilt: $\quad (a-1)x = \ln a$

1. Fall: $\quad a = 1 \quad \Rightarrow \quad 0 \cdot x = 0$ wahr für alle Werte von x

$\Rightarrow$ alle Punkte der x-Achse sind Schnittpunkte

2. Fall: $\quad a \neq 1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{\ln a}{a-1} \quad \Rightarrow$ Schnittpunkt $N\left(\frac{\ln a}{a-1} \middle| 0\right)$

y-Achse: $\quad f_a(0) = e^0 - ae^0 = 1 - a \quad \Rightarrow \quad$ Schnittpunkt $S(0 \mid 1 - a)$

Extrempunkte

$f_a'(x) = ae^{ax} - ae^x = ae^x \cdot \left(e^{(a-1)x} - 1\right)$

1. Fall: $\quad a = 0 \quad \Rightarrow \quad f_a'(x) = 0$ für alle Werte von x $\quad \Rightarrow \quad$ Graph parallel zur x-Achse

2. Fall: $\quad a \neq 0 \quad \Rightarrow \quad e^{(a-1)x} - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; e^{(a-1)x} = 1 \;\Leftrightarrow\; (a-1)x = 0$

Fall 2.a): $\quad a = 1 \Rightarrow f_a'(x) = 0$ für alle Werte von x $\Rightarrow$ Graph par. zur x-A.

Fall 2.b): $\quad a \neq 1 \quad \Rightarrow \quad x = \frac{0}{a-1} = 0$

$f_a''(x) = a^2e^{ax} - ae^x; \qquad f_a''(0) = a^2e^0 - ae^0 = a(a-1) \begin{cases} > 0 \text{ für } a > 1 \text{ und für } a < 0 \\ < 0 \text{ für } 0 < a < 1 \end{cases}$

Ergebnis: $\quad a = 0$ und $a = 1$: Graphen parallel zur x-Achse $\Rightarrow$ keine Extrempunkte

$a > 1$ und $a < 0$: TIP$(0 \mid 1 - a)$

$0 < a < 1$: HOP$(0 \mid 1 - a)$ Sie liegen alle auf $x = 0$ (y-Achse).

Wendepunkte

Fälle $a = 0$ und $a = 1$ vgl. oben: keine Wendepunkte, da Graphen parallel zur x-Achse.

Für $a \neq 0$ und $a \neq 1$: $\quad f_a''(x) = a^2e^{ax} - ae^x = ae^x \cdot \left(ae^{(a-1)x} - 1\right)$

$f_a''(x) = 0 \;\Rightarrow\; ae^{(a-1)x} - 1 = 0 \;\Leftrightarrow\; e^{(a-1)x} = \frac{1}{a}$

Dies hat nur eine Lösung für $a > 0$; d.h. für $a < 0$ gibt es keine FP.

$$\text{Für } a>0 \text{ folgt: } (a-1)x = \ln\frac{1}{a} = -\ln a \iff x = \frac{\ln a}{1-a}$$

$$f_a'''(x) = a^3e^{ax} - ae^x; \qquad f_a'''\left(\frac{\ln a}{1-a}\right) = a^3e^{a\cdot\frac{\ln a}{1-a}} - ae^{\frac{\ln a}{1-a}} = a^3\cdot a^{\frac{a}{1-a}} - a\cdot a^{\frac{1}{1-a}} = a^{\frac{3-2a}{1-a}} - a^{\frac{2-a}{1-a}}$$

$$f_a'''\left(\frac{\ln a}{1-a}\right) = 0 \Rightarrow \frac{3-2a}{1-a} = \frac{2-a}{1-a} \Rightarrow 3-2a = 2-a \iff a = 1$$

a = 1 ist aber nicht möglich $\Rightarrow f_a'''\left(\frac{\ln a}{1-a}\right) \neq 0$

$$f_a\left(\frac{\ln a}{1-a}\right) = e^{a\cdot\frac{\ln a}{1-a}} - ae^{\frac{\ln a}{1-a}} = a^{\frac{a}{1-a}} - a\cdot a^{\frac{1}{1-a}} = a^{\frac{a}{1-a}} - a^{\frac{2-a}{1-a}}$$

Ergebnis: Für $a>0$ aber $a\neq 1$ gibt es den WP$\left(\frac{\ln a}{1-a} \,\middle|\, a^{\frac{a}{1-a}} - a^{\frac{2-a}{1-a}}\right)$ *(Kurve nicht bestimmbar.)*