Lösung zur Analysis S. 116 Nr. 68a

Definitionsmenge

Nenner: $e^x \neq 0$ gilt immer; Wurzel: es muss gelten: $e^x - a \geq 0$

1. Fall: $a \leq 0$: hierfür gilt immer: $e^x - a \geq 0$; $\Rightarrow$ $\mathbb{D}_{f_a} = \mathbb{R}$

2. Fall: $a > 0$: $e^x - a \geq 0 \Leftrightarrow e^x \geq a \Leftrightarrow x \geq \ln a \Rightarrow \mathbb{D}_{f_a} = [\ \ln a; \infty\ [$

Symmetrie

$$f_a(-x) = 4\,\frac{\sqrt{e^{-x}-a}}{e^{-x}} \begin{cases} \neq f_a(x) \\ \neq -f_a(x) \end{cases} \qquad \Rightarrow \text{ keine bekannte Symmetrie}$$

Verhalten an den Grenzen von $\mathbb{D}_{f_a}$

$$\lim_{x\to\infty} 4\,\frac{\sqrt{e^x-a}}{e^x} = \lim_{x\to\infty} 4\sqrt{\frac{1}{e^x} - a\cdot\left(\frac{1}{e^x}\right)^2} = 0$$

1. Fall: $a \leq 0$: $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} 4\,\frac{\sqrt{e^x-a}}{e^x} = \lim_{x\to-\infty} 4\sqrt{\frac{1}{e^x} - a\cdot\left(\frac{1}{e^x}\right)^2} = \lim_{x\to\infty} 4\sqrt{e^x - a\cdot e^{2x}} = \infty$

2. Fall: $a > 0$: $\displaystyle\lim_{x \overset{>}{\to} \ln a} 4\,\frac{\sqrt{e^x-a}}{e^x} = 4\cdot\frac{0}{a} = 0$

Schnittpunkte mit den Achsen

x-Achse: $f_a(x) = 0 \Rightarrow \sqrt{e^x - a} = 0 \Rightarrow e^x - a = 0 \Leftrightarrow e^x = a$
Dies hat nur eine Lösung, wenn $a > 0$: N(ln a | 0). Für $a \leq 0$: kein Schnittpunkt

y-Achse: $f_a(0) = 4\,\frac{\sqrt{e^0-a}}{e^0} = 4\sqrt{1-a}$ für $a \leq 1$: S(0 | $4\sqrt{1-a}$). Für $a > 1$ kein Schnittpkt.

Extrempunkte

$$f_a'(x) = 4\cdot\frac{\frac{e^x}{2\sqrt{e^x-a}}\cdot e^x - \sqrt{e^x-a}\cdot e^x}{e^{2x}} = 4\cdot\frac{\frac{e^x}{2\sqrt{e^x-a}} - \sqrt{e^x-a}}{e^x} = 2\cdot\frac{\frac{e^x-2\left(e^x-a\right)}{\sqrt{e^x-a}}}{e^x} = 2\cdot\frac{2a-e^x}{e^x\sqrt{e^x-a}}$$

$$f_a''(x) = 2\cdot\frac{-e^x\cdot e^x\sqrt{e^x-a} - \left(e^x\sqrt{e^x-a} + e^x\cdot\frac{e^x}{2\sqrt{e^x-a}}\right)\cdot\left(2a-e^x\right)}{e^{2x}\left(e^x-a\right)}$$

$$= 2\cdot\frac{-e^x\sqrt{e^x-a} - \frac{2\left(e^x-a\right)+e^x}{2\sqrt{e^x-a}}\cdot\left(2a-e^x\right)}{e^x\left(e^x-a\right)} = \frac{\frac{-2e^x\left(e^x-a\right)-\left(3e^x-2a\right)\left(2a-e^x\right)}{\sqrt{e^x-a}}}{e^x\left(e^x-a\right)}$$

$$= \frac{-2e^{2x}+2ae^x-6ae^x+3e^{2x}+4a^2-2ae^x}{e^x\left(e^x-a\right)\sqrt{e^x-a}} = \frac{e^{2x}-6ae^x+4a^2}{e^x\left(e^x-a\right)\sqrt{e^x-a}}$$

$f_a'(x) = 0 \Rightarrow 2a - e^x = 0 \Leftrightarrow e^x = 2a$ Dies hat nur eine Lösung für $a > 0$,
d.h. für $a \leq 0$ gibt es keine waagerechten Tangenten und damit auch keine Extrempunkte.

Für $a > 0$: $e^x = 2a \Rightarrow x = \ln 2a$; $\displaystyle f_a(\ln 2a) = 4\cdot\frac{\sqrt{e^{\ln 2a}-a}}{e^{\ln 2a}} = 4\cdot\frac{\sqrt{2a-a}}{2a} = 2\cdot\frac{\sqrt{a}}{a} = \frac{2}{\sqrt{a}}$

$$f_a''(\ln 2a) = \frac{e^{2\cdot\ln 2a}-6ae^{\ln 2a}+4a^2}{e^{\ln 2a}\left(e^{\ln 2a}-a\right)\sqrt{e^{\ln 2a}-a}} = \frac{(2a)^2-6a\cdot 2a+4a^2}{2a\,(2a-a)\sqrt{2a-a}} = \frac{4a^2-12a^2+4a^2}{2a^2\sqrt{a}} = \frac{-2}{\sqrt{a}} < 0$$

Ergebnis: für $a > 0$ HOP(ln 2a | $\frac{2}{\sqrt{a}}$)

Kurve der HOP: $x = \ln 2a \Leftrightarrow 2a = e^x \Leftrightarrow a = \frac{1}{2}e^x$; $\displaystyle y = \frac{2}{\sqrt{a}} = \frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}e^x}} = 2\sqrt{2}\cdot e^{-\frac{1}{2}x}$

Wendepunkte

$f_a''(x) = 0 \;\Rightarrow\; e^{2x} - 6ae^x + 4a^2 = 0$

$\Rightarrow\; e^x = \dfrac{6a \pm \sqrt{36a^2 - 16a^2}}{2} = \dfrac{6a \pm 2\sqrt{5}\cdot|a|}{2} = 3a \pm \sqrt{5}\cdot|a| = \begin{cases}\left(3+\sqrt{5}\right)a \\ \left(3-\sqrt{5}\right)a\end{cases}$

Lösungen für x gibt es nur für a > 0. Für $a \le 0$ gibt es also keine Flach- und damit auch keine Wendepunkte.

Für a > 0 gilt: $\left(3-\sqrt{5}\right)a < a \;\Rightarrow\; \ln\left[\left(3-\sqrt{5}\right)a\right] < \ln a \;\Rightarrow\; \ln\left[\left(3-\sqrt{5}\right)a\right] \notin \mathbb{D}_{f_a}$

$\Rightarrow$ Der einzige Flachpunkt ist bei $x = \ln\left[\left(3+\sqrt{5}\right)a\right]$. $\qquad f_a''(x) = \dfrac{e^{2x} - 6ae^x + 4a^2}{e^x\left(e^x - a\right)^{\frac{3}{2}}}$

$$f_a'''(x) = \frac{\left(2e^{2x} - 6ae^x\right)e^x\left(e^x - a\right)^{\frac{3}{2}} - \left(e^{2x} - 6ae^x + 4a^2\right)\left[e^x\left(e^x - a\right)^{\frac{3}{2}} + e^x\cdot\frac{3}{2}\left(e^x - a\right)^{\frac{1}{2}}\cdot e^x\right]}{e^{2x}\left(e^x - a\right)^3}$$

$$= \frac{\sqrt{e^x - a}\cdot\left\{\left(2e^{2x} - 6ae^x\right)\left(e^x - a\right) - \left(e^{2x} - 6ae^x + 4a^2\right)\left[e^x - a + \frac{3}{2}e^x\right]\right\}}{e^x\left(e^x - a\right)^3}$$

$$= \frac{\left(2e^{2x} - 6ae^x\right)\left(e^x - a\right) - \left(e^{2x} - 6ae^x + 4a^2\right)\left[\frac{5}{2}e^x - a\right]}{e^x\left(e^x - a\right)^2\sqrt{e^x - a}}$$

$$= \frac{2e^{3x} - 2ae^{2x} - 6ae^{2x} + 6a^2e^x - \frac{5}{2}e^{3x} + ae^{2x} + 15ae^{2x} - 6a^2e^x - 10a^2e^x + 4a^3}{e^x\left(e^x - a\right)^2\sqrt{e^x - a}}$$

$$= \frac{-\frac{1}{2}e^{3x} + 8ae^{2x} - 10a^2e^x + 4a^3}{e^x\left(e^x - a\right)^2\sqrt{e^x - a}}$$

$$f_a'''\left(\ln\left[\left(3+\sqrt{5}\right)a\right]\right) = \frac{-\frac{1}{2}\left[\left(3+\sqrt{5}\right)a\right]^3 + 8a\left[\left(3+\sqrt{5}\right)a\right]^2 - 10a^2\left[\left(3+\sqrt{5}\right)a\right] + 4a^3}{\left[\left(3+\sqrt{5}\right)a\right]\left(\left[\left(3+\sqrt{5}\right)a\right] - a\right)^2\sqrt{\left[\left(3+\sqrt{5}\right)a\right] - a}}$$

$$= \frac{-\left(36+16\sqrt{5}\right)a^3 + 8a\left(14+6\sqrt{5}\right)a^2 - 10a^2\left(3+\sqrt{5}\right)a + 4a^3}{\left[\left(3+\sqrt{5}\right)a\right]\left(\left(2+\sqrt{5}\right)a\right)^2\sqrt{\left(2+\sqrt{5}\right)a}}$$

$$= \frac{\left(-36 - 16\sqrt{5} + 112 + 48\sqrt{5} - 30 - 10\sqrt{5} + 4\right)a^3}{\left(3+\sqrt{5}\right)\left(2+\sqrt{5}\right)^2a^3\sqrt{\left(2+\sqrt{5}\right)a}}$$

$$= \frac{\left(50+22\sqrt{5}\right)a^3}{\left(3+\sqrt{5}\right)\left(2+\sqrt{5}\right)^2a^3\sqrt{\left(2+\sqrt{5}\right)a}} > 0$$

$$f_a\left(\ln\left[\left(3+\sqrt{5}\right)a\right]\right) = 4\cdot\frac{\sqrt{\left(3+\sqrt{5}\right)a - a}}{\left(3+\sqrt{5}\right)a} = 4\cdot\frac{\sqrt{\left(2+\sqrt{5}\right)a}}{\left(3+\sqrt{5}\right)a} \;\Rightarrow\; WP\left(\ln\left[\left(3+\sqrt{5}\right)a\right] \,\middle|\, 4\cdot\frac{\sqrt{\left(2+\sqrt{5}\right)a}}{\left(3+\sqrt{5}\right)a}\right)$$

Kurve der WP: $x = \ln\left[\left(3+\sqrt{5}\right)a\right] \;\Leftrightarrow\; \left(3+\sqrt{5}\right)a = e^x \;\Leftrightarrow\; a = \frac{1}{3+\sqrt{5}}e^x$

$$y = 4\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{5}}}{\left(3+\sqrt{5}\right)\sqrt{a}} = 4\cdot\frac{\sqrt{2+\sqrt{5}}}{\left(3+\sqrt{5}\right)\sqrt{\frac{1}{3+\sqrt{5}}e^x}} = 4\cdot\sqrt{\frac{\left(2+\sqrt{5}\right)\left(3-\sqrt{5}\right)}{\left(3+\sqrt{5}\right)\left(3-\sqrt{5}\right)}}\cdot e^{-\frac{1}{2}x} = 2\cdot\sqrt{1+\sqrt{5}}\cdot e^{-\frac{1}{2}x}$$

Alternativ zur hinreichenden Bedingung mit der 3. Ableitung kann mit einer Krümmungstabelle gearbeitet werden. Als Testwerte bieten sich an: $f_a''(\ln 5a)$ und $f_a''(\ln 6a)$.

<u>Graphen</u>