Lösungen zu Grundkurs Abituraufgaben Mathematik Analysis

1998, I

1.a) $f'(x)=\frac{1}{2}\left[1+(\ln x)^2\right]+\frac{x}{2}\cdot 2\cdot\ln x\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{2}\left\{\left[1+(\ln x)^2\right]+\cdot 2\cdot\ln x\right\}=\frac{1}{2}\left[1+2\ln x+(\ln x)^2\right]=\frac{1}{2}(1+\ln x)^2$

$f'(x)=0 \;\Rightarrow\; 1+\ln x=0 \;\Leftrightarrow\; \ln x=-1 \;\Leftrightarrow\; x=e^{-1}=\frac{1}{e}$

Für alle anderen Werte von x ist f'(x) positiv und damit f streng monoton steigend.
Darum ist an der einzigen Stelle mit waagerechter Tangente kein Extremum.

b) $f''(x)=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot(1+\ln x)\cdot\frac{1}{x}=\frac{1}{x}\cdot(1+\ln x)$ $\qquad f''(x)=0 \;\Rightarrow\; 1+\ln x=0 \;\Leftrightarrow\; x=e^{-1}=\frac{1}{e}$

Dies ist eine Nullstelle 1. Ordnung von f" $\Rightarrow$ VZW (von neg. nach pos.).
Da hier auch eine waagerechte Tangente vorliegt, ist dieser Wendepunkt ein Terassenpunkt. Die Krümmung wechselt von rechts nach links. $f\left(\frac{1}{e}\right)=\frac{1}{e} \;\Rightarrow\; WP\left(\frac{1}{e}\middle|\frac{1}{e}\right)$.

c) $\lim\limits_{\substack{>\\x\to 0}}\frac{x}{2}\left[1+(\ln x)^2\right]=\lim\limits_{\substack{>\\x\to 0}}\left[\frac{x}{2}+\frac{x}{2}\cdot(\ln x)^2\right]=\lim\limits_{\substack{>\\x\to 0}}\frac{x}{2}+\frac{1}{2}\cdot\lim\limits_{\substack{>\\x\to 0}}x(\ln x)^2=0+\frac{1}{2}\cdot 0=0$ (vgl. Hinweis)

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x}{2}\left[1+(\ln x)^2\right]=\infty$ weil beide Faktoren positiv sind und gegen ∞ gehen

$\lim\limits_{\substack{>\\x\to 0}}\frac{1}{2}(1+\ln x)^2=\infty$ da $\ln x\to-\infty \;\Rightarrow\; 1+\ln x\to-\infty \;\Rightarrow\; (1+\ln x)^2\to+\infty$

$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{2}(1+\ln x)^2=\infty$ da $\ln x\to\infty \;\Rightarrow\; 1+\ln x\to\infty \;\Rightarrow\; (1+\ln x)^2\to\infty$

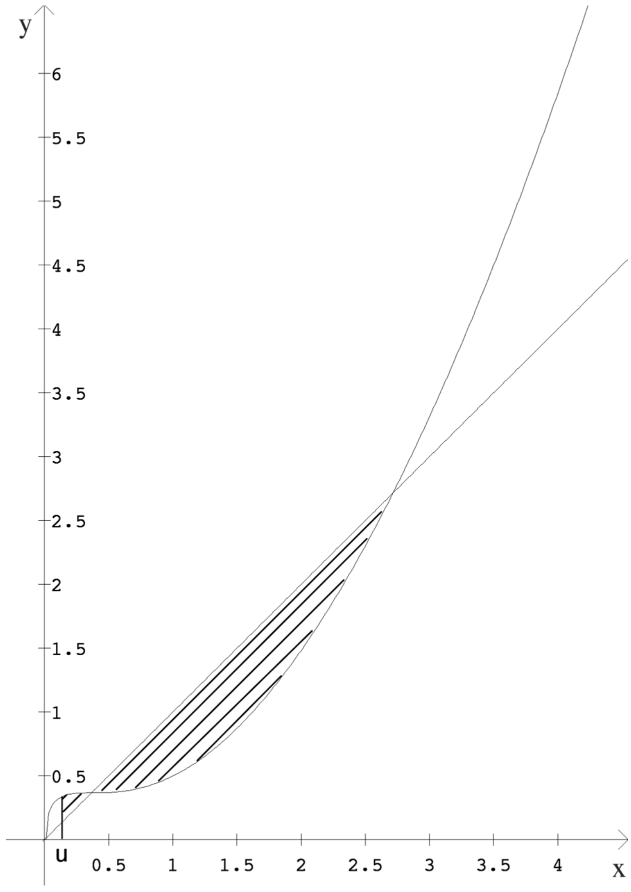
Aus den Grenzwerten an den Grenzen von $\mathbb{D}$ und der Monotonie folgt: $\mathbb{W}_f=\mathbb{R}^+$

d) $y=x$ schneiden mit $y=\frac{x}{2}\left[1+(\ln x)^2\right]$

$\Rightarrow\; x=\frac{x}{2}\left[1+(\ln x)^2\right] \;\Leftrightarrow\; 2=1+(\ln x)^2 \;\Leftrightarrow$

$(\ln x)^2=1 \;\Rightarrow\; \ln x=\pm 1 \;\Rightarrow\; x_{1;2}=\begin{cases} e^1=e \\ e^{-1}=\frac{1}{e}\end{cases}$

f(e) = e. Schnittpunkte: $S_1(e\,|\,e)$; $S_2\left(\frac{1}{e}\middle|\frac{1}{e}\right)$



2. $f(1{,}5)=\frac{1{,}5}{2}\left[1+(\ln 1{,}5)^2\right]\approx 0{,}873$;

$f(4)=\frac{4}{2}\left[1+(\ln 4)^2\right]\approx 5{,}844$

3. a) F'(x) = $\frac{2x}{8}\left[2(\ln x)^2-2\ln x+3\right]+\frac{x^2}{8}\left[4\ln x\cdot\frac{1}{x}-\frac{2}{x}\right]$

$=\frac{x}{4}\left[2(\ln x)^2-2\ln x+3\right]+\frac{x}{4}\left[2\ln x-1\right]$

$=\frac{x}{4}\left[2(\ln x)^2-2\ln x+3+2\ln x-1\right]$

$=\frac{x}{4}\left[2(\ln x)^2+2\right]=\frac{x}{2}\left[(\ln x)^2+1\right]=f(x)$

$\Rightarrow$ F ist Stammfunktion von f.

b) Die Schnittpunkte wurden in 1.d) bestimmt.

$A(u)=\int\limits_u^{e^{-1}}(f(x)-x)\,dx+\int\limits_{e^{-1}}^{e}(x-f(x))\,dx$

$=\left[\frac{x^2}{8}\left[2(\ln x)^2-2\ln x+3\right]-\frac{x^2}{2}\right]_u^{e^{-1}}+\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^2}{8}\left[2(\ln x)^2-2\ln x+3\right]\right]_{e^{-1}}^{e}$

$=\frac{1}{8e^2}[2+2+3]-\frac{1}{2e^2}-\frac{u^2}{8}\left[2(\ln u)^2-2\ln u+3\right]+\frac{u^2}{2}+\frac{e^2}{2}-\frac{e^2}{8}[2-2+3]-\frac{1}{2e^2}+\frac{1}{8e^2}[2+2+3]$

$=\frac{3}{4e^2}+\frac{e^2}{8}-\frac{u^2}{8}\left[2(\ln u)^2-2\ln u\right]+\frac{u^2}{8}$; $\qquad \lim\limits_{u\to 0}\frac{u^2}{8}\left[2(\ln u)^2-2\ln u\right]=0$ (vgl. Hinweis)

$\Rightarrow\; \lim\limits_{u\to 0}A(u)=\frac{3}{4e^2}+\frac{e^2}{8}$ $(\approx 1{,}025)$

4. 90°; G_f hat dort eine w.T. (vgl. 1.a) $\Rightarrow$ $G_{f^{-1}}$ hat dort eine senkr.T. (durch Spiegelung an y=x)