Lösungen zu Grundkurs Abituraufgaben Mathematik Analysis

2002, II

1 a) $f(x)=0 \;\Leftrightarrow\; e^x(x-a)=0 \;\Rightarrow\; x=a \;\Rightarrow\; N(a\,|\,0)$ Schnittpunkt mit der x-Achse.

$f(0)=e^0(0-a)=-a \;\Rightarrow\; S(0\,|-a)$ Schnittpunkt mit der y-Achse.

$\lim\limits_{x\to\infty} e^x(x-a)=\infty$, da jeder der Faktoren gegen ∞ geht.

b) $f'(x)=e^x(x-a)+e^x\cdot 1=e^x(x-a+1)=0 \;\Rightarrow\; x=a-1;\quad f(a-1)=e^{a-1}(a-1-a)=-e^{a-1}$

$f''(x)=e^x(x-a+1)+e^x\cdot 1=e^x(x-a+2)$

$f''(a-1)=e^{a-1}(a-1-a+2)=e^{a-1}>0 \;\Rightarrow\; TIP\left(a-1\,\middle|\,-e^{a-1}\right)$

$f''(x)=0 \;\Rightarrow\; x=a-2$

$f''(x)>0$ für $x>a-2 \;\Rightarrow\; G_f$ ist linksgekrümmt in $[a-2;\infty[$

$f''(x)<0$ für $x<a-2 \;\Rightarrow\; G_f$ ist rechtsgekrümmt in $]-\infty;a-2]$

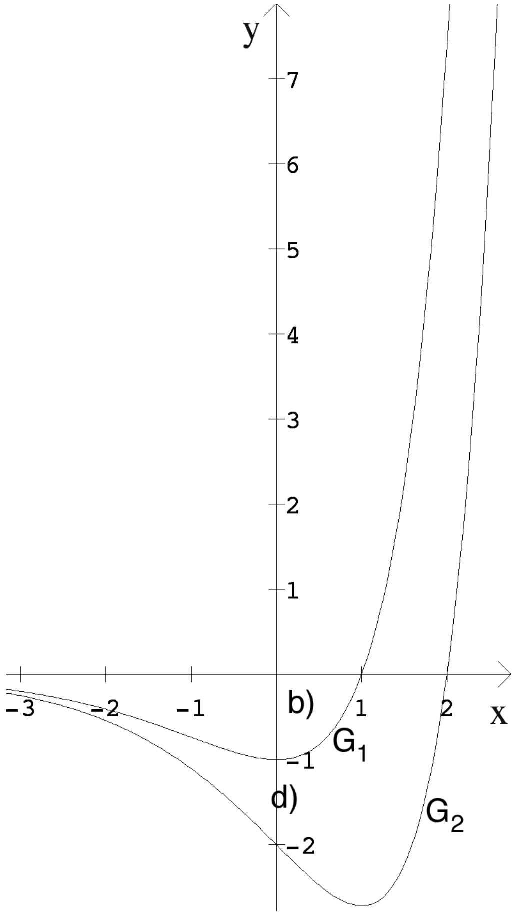
$f(a-2)=e^{a-2}(a-2-a)=-2e^{a-2} \;\Rightarrow\; WP\left(a-2\,\middle|\,-2e^{a-2}\right)$

c) $f_2(x)-f_1(x)=e^x(x-2)-e^x(x-1)=-e^x<0$

d.h. f_2 ist immer kleiner als f_1, also liegt G_1 in ganz $\mathbb{R}$ oberhalb von G_2.

d) $f_1(-3)=e^{-3}(-3-1)=-4e^{-3}\approx-0{,}199$

$f_1(2)=e^2(2-1)=e^2\approx 7{,}39$



2. a) $f_{a+1}(x)=e^x(x-a-1)$

$f'_{a+1}(x)=e^x(x-a-1)+e^x\cdot 1=e^x(x-a)=f(x)$

$\Rightarrow\; f_{a+1}$ ist Stammfunktion von f_a.

b) $A=-\int_0^1 f_1(x)\,dx=\int_1^0 f_1(x)\,dx=\left[f_2(x)\right]_1^0=\left[e^x(x-2)\right]_1^0$

$=e^0\cdot(-2)-e^1(1-2)=-2+e\approx 0{,}718$

c) Viertelkreis mit $r = 1$: $\quad A_{VK}=\frac{1}{4}\pi 1^2=\frac{\pi}{4}\approx 0{,}785$

Abweichung: $\frac{0{,}785-0{,}718}{0{,}718}\approx 0{,}093=9{,}3\%$

d) Die Fläche, die von den beiden Graphen G_1 und G_2, der Geraden $x = -3$ und der x-Achse begrenzt wird.