Lösungen zu Grundkurs Abituraufgaben Mathematik Analysis

2001, I

1 a) $f(x) = \ln \frac{4+x}{4-x} = 0 \;\Leftrightarrow\; \frac{4+x}{4-x} = 1 \;\Leftrightarrow\; 4+x = 4-x \;\Leftrightarrow\; x = 0 \quad\Rightarrow\quad$ NS: $x = 0$

$$\lim_{x \overset{>}{\to} -4} \left[\ln(4+x) - \ln(4-x)\right] = \lim_{x \overset{>}{\to} -4} \ln(4+x) - \lim_{x \overset{>}{\to} -4} \ln(4-x) = \lim_{x \overset{>}{\to} -4} \ln(4+x) - \ln 8 = -\infty$$

$$\lim_{x \overset{<}{\to} 4} \left[\ln(4+x) - \ln(4-x)\right] = \lim_{x \overset{<}{\to} 4} \ln(4+x) - \lim_{x \overset{<}{\to} 4} \ln(4-x) = \ln 8 - \lim_{x \overset{<}{\to} 4} \ln(4-x) = +\infty$$

Also sind $x = -4$ und $x = 4$ senkrechte Asymptoten für G_f.

b) $f(-x) = \ln(4+(-x)) - \ln(4-(-x)) = \ln(4-x) - \ln(4+x) = -(\ln(4+x) - \ln(4-x)) = -f(x)$

$\Rightarrow$ G_f ist punktsymmetrisch zum Ursprung.

c) $f'(x) = \frac{1}{4+x} - \frac{1}{4-x} \cdot (-1) = \frac{4-x+4+x}{(4+x)(4-x)} = \frac{8}{16-x^2}$. In $\mathbb{D}$ ist der Nenner immer positiv, also auch f‘(x).

Damit ist f in ganz $\mathbb{D}$ streng monoton steigend.

$f'(x) = 8 \cdot \left(16 - x^2\right)^{-1} \;\Rightarrow\; f''(x) = 8 \cdot (-1) \cdot \left(16 - x^2\right)^{-2} \cdot (-2x) = \frac{16x}{\left(16-x^2\right)^2}$

$f''(x) = 0 \;\Rightarrow\; 16x = 0 \;\Rightarrow\; x = 0$. Also höchstens ein Wendepunkt bei $x = 0$.

$f''(x) < 0$ für $x < 0$; $f''(x) > 0$ für $x > 0$ $\Rightarrow$ bei $x = 0$ wechselt die Krümmun R $\rightarrow$ L

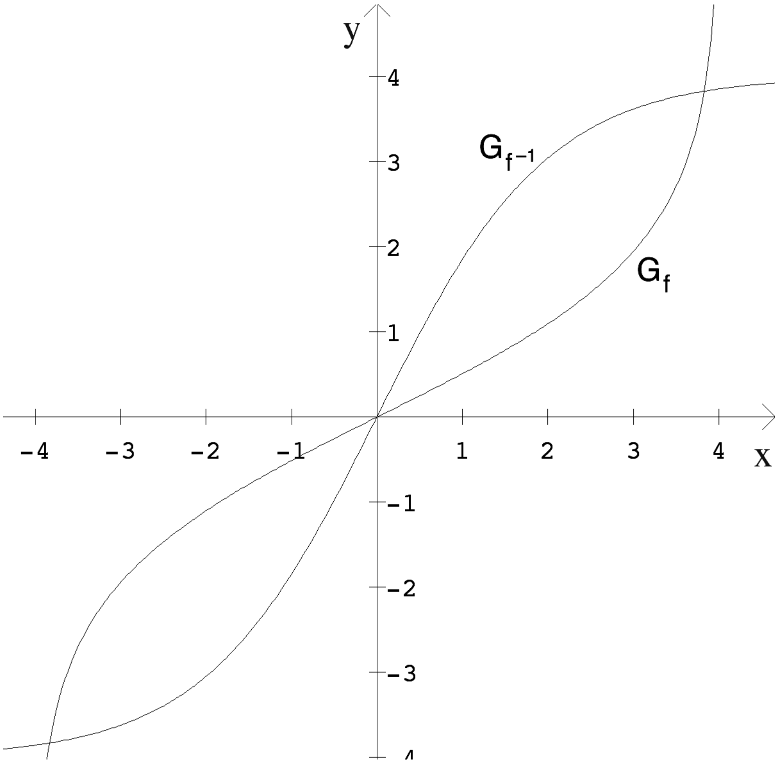
$\Rightarrow$ Wendepunkt WP(0 | 0)
(da f(0) = 0))

d) $f(-3) = -\ln 7 \approx -1{,}95$

$f(-2) = \ln 2 - \ln 6 \approx -1{,}10$

(aus der Symmetrie folgt:
$f(3) \approx 1{,}95$; $f(2) \approx 1{,}10$)

$f'(0) = \frac{8}{16} = \frac{1}{2}$ (dies ist die Steigung im Ursprung).



e) Da f in ganz $\mathbb{D}$ streng monoton steigend ist, ist die Zuordnung ein-eindeutig, also hat f eine Umkehrfunktion.

f^{-1}: $x = \ln \frac{4+y}{4-y} \;\Leftrightarrow\; e^x = \frac{4+y}{4-y}$

$\Rightarrow\; (4-y) \cdot e^x = 4 + y$

$\Leftrightarrow\; y + y\,e^x = 4e^x - 4$

$\Leftrightarrow\; y\left(1 + e^x\right) = 4\left(e^x - 1\right)$

$\Leftrightarrow\; y = \frac{4\left(e^x - 1\right)}{e^x + 1}$

2. a) $g(x) = f(x) \;\Leftrightarrow\; \ln(4+x) = \ln(4+x) - \ln(4-x) \;\Leftrightarrow\; \ln(4-x) = 0 \;\Leftrightarrow\; 4 - x = 1 \;\Leftrightarrow\; x = 3$

$f(3) = \ln 7 \;\Rightarrow\; S(\,3 \,|\, \ln 7\,)$

b) f und g haben dieselbe Definitionsmenge.
G_f verläuft oberhalb von G_g, wenn f(x) – g(x) > 0, und unterhalb, wenn f(x) – g(x) < 0.
f(x) – g(x) = – ln(4 – x) < 0 für 4 – x > 1, d.h. für x < 3 und f(x) – g(x) > 0 für x > 3.
Daraus folgt die Behauptung.

c) $(g-f)(x) = g(x) - f(x) = \ln(4-x)$

$K'(x) = -1 - \left[(-1)\ln(4-x) + (4-x) \cdot \frac{1}{4-x} \cdot (-1)\right] = -1 + \ln(4-x) - 1 = \ln(4-x) = (g-f)(x)$

$\Rightarrow$ K ist Stammfunktion von g – f (beide haben dieselbe Definitionsmenge)

$J_1 = \left[-x - (4-x) \cdot \ln(4-x)\right]_0^1 = -1 - 3 \cdot \ln 3 - [-4 \cdot \ln 4] = -1 - 3 \cdot \ln 3 + 4 \cdot \ln 4 \approx 1{,}25$

d) $J_t'(t) = g(t) - f(t) = \ln(4-t)$ nach dem Hauptsatz der Differenzial. und Integralrechnung.

Nach 2.a) ist $J_t'(t) = 0$ für $t = 3$. Nach 2.b) wechselt $J_t'(t)$ nur bei $t = 3$ das Vorzeichen, und zwar von negativ nach positiv.

$\Rightarrow$ J_t hat bei $t = 3$ ein Maximum, also den höchsten Wert.