Lösungen zu Grundkurs Abituraufgaben Mathematik Analysis

2000, II

1 a) $f(x)=0 \;\Rightarrow\; 4x=0 \;\Leftrightarrow\; x=0 \;\Rightarrow\; \text{NS}: x=0$

$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{4x}{e^{0,5x}}=0$ da $\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x^n}{e^{ax}}=0$ (Formelsammlung) $\Rightarrow$ $y = 0$ waag. Asymptote

$\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{4x}{e^{0,5x}}=\lim\limits_{x\to-\infty}4x\,e^{-0,5x}=-\infty$ da $4x\to-\infty$ und $e^{-0,5x}\to+\infty$ für $x\to-\infty$.

b) Ableitung einfacher mit der Produktregel für $f(x)=4x\,e^{-0,5x}$:

$f'(x)=4\,e^{-0,5x}+4x\,e^{-0,5x}\cdot(-0,5)=e^{-0,5x}(4-2x)$ $\qquad f'(x) = 0 \;\Rightarrow\; x = 2$

$e^{-0,5x}$ ist immer positiv. $f'(x)>0$ für $x < 2$ $\Rightarrow$ f ist streng monoton steigend in $]-\infty; 2]$

$f'(x)<0$ für $x > 2$ $\Rightarrow$ f ist streng monoton fallend in $[2; \infty[$

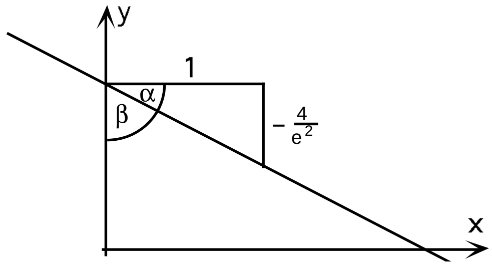
$\Rightarrow$ HOP bei x = 2. $\quad f(2)=\frac{8}{e} \quad\Rightarrow\quad \text{HOP}\left(2\,\middle|\,\frac{8}{e}\right)$

$f''(x)=e^{-0,5x}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(4-2x)+e^{-0,5x}\cdot(-2)=e^{-0,5x}\cdot(-2+x-2)=e^{-0,5x}\cdot(x-4)$

$f''(x) = 0 \;\Rightarrow\; x = 4;$ $\quad f''(x)>0$ für $x < 4$ $\Rightarrow$ G_f ist linksgekrümmt in $]-\infty; 4]$

$f''(x)<0$ für $x > 4$ $\Rightarrow$ G_f ist rechtsgekrümmt in $[4; \infty[$

$\Rightarrow$ WP bei x = 4. $\quad f(4)=\frac{16}{e^2} \quad\Rightarrow\quad \text{WP}\left(4\,\middle|\,\frac{16}{e^2}\right)$



c) $m=f'(4)=-\frac{4}{e^2}$; $\quad$ WP $\in$ Wendetangente

$\Rightarrow\quad \frac{16}{e^2}=-\frac{4}{e^2}\cdot 4+t \;\Rightarrow\; t=\frac{32}{e^2}$

$\Rightarrow\quad$ Wendetangente: $y=-\frac{4}{e^2}\cdot x+\frac{32}{e^2}$

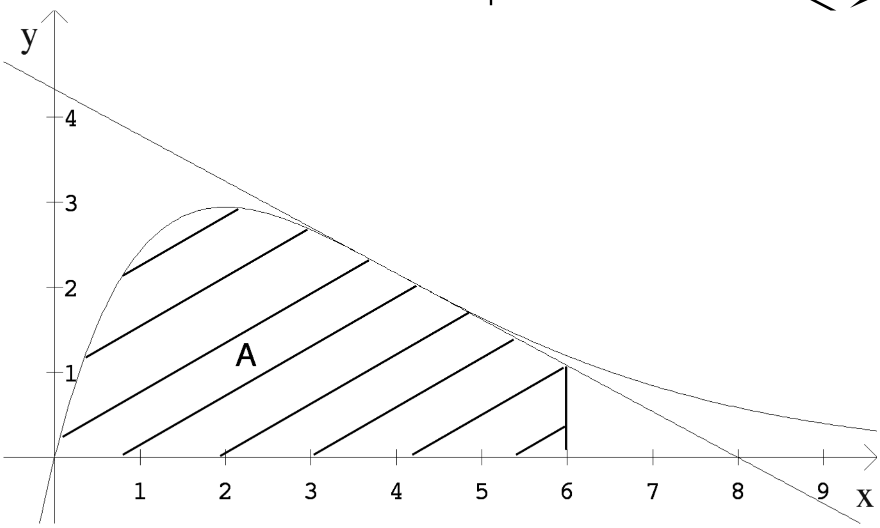
$\tan\alpha=\dfrac{1}{\frac{4}{e^2}}=\dfrac{e^2}{4}\Rightarrow\alpha\approx 28,4^\circ$

$\Rightarrow\quad \beta = 90^\circ-\alpha = 61,6^\circ$

d) $f\left(\frac{1}{2}\right)=2\cdot e^{-0,25}\approx 1,56$

$f(1)=4\cdot e^{-0,5}\approx 2,43$

$f(6)=24\cdot e^{-3}\approx 1,19$



2. a) $F(x)=(-8x-16)\cdot e^{-0,5x}$

$F'(x)=(-8)\cdot e^{-0,5x}$

$+(-8x-16)\cdot e^{-0,5x}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)$

$=e^{-0,5x}\cdot(-8+4x+8)$

$=4x\cdot e^{-0,5x}=f(x)$ $\quad\Rightarrow$ F ist Stammfunktion von f.

b) $A=\int\limits_0^6 f(x)\,dx=\left[\frac{-8x-16}{e^{0,5x}}\right]_0^6=\frac{-64}{e^3}+16\approx 12,81$

3. vgl. Heft: viele Möglichkeiten (z.B. Wachstumsfunktion, radioaktiver Zerfall, etc.)
positiver Faktor b bedeutet: Wachstum, Zunahme
negativer Faktor b bedeutet: Zerfall, Abnahme
a ist der Funktionswert zum Zeitpunkt $t = 0$ (wenn t die Variable ist, sonst entsprechend die Bedeutung für $x = 0$)