

# Aufgaben zu Grenzwerten

1. a)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 + x^3}{x^2} - 1$       b)  $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2 - x - 2}{x - 2}$       c)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{|x-1|}{x-1}$
- d)  $\lim_{x \underset{<}{\rightarrow} 1} \operatorname{sgn}(x-1)$       e)  $\lim_{x \underset{>}{\rightarrow} 1} \operatorname{sgn}(x-1)$       f)  $\lim_{x \underset{<}{\rightarrow} 0} \frac{x+|x|}{2x}$
- g)  $\lim_{x \underset{>}{\rightarrow} 0} \frac{x+|x|}{2x}$       h)  $\lim_{x \underset{>}{\rightarrow} 1} \frac{x^2 - 3x + 2}{\sqrt{x^2} - 1}$       i)  $\lim_{x \rightarrow 1} \left( \frac{1}{1-x} - \frac{3}{1-x^3} \right)$
- j)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}{x}$       k)  $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \sin(1-x)$       l)  $\lim_{x \rightarrow 1} x \cdot \sin(1-x)$
- m)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{x \cdot \tan x}{1-x}$       n)  $\lim_{x \rightarrow 0} x \cdot \cos \frac{1}{x}$       o)  $\lim_{x \underset{>}{\rightarrow} 1} \frac{|x^4 - 1|}{x^2 - 1}$
- p)  $\lim_{x \underset{<}{\rightarrow} 1} \frac{|x^4 - 1|}{x^2 - 1}$       q)  $\lim_{x \rightarrow 2\pi} \frac{(\sin x)^2}{1 - \cos x}$       r)  $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{1 + \cos x}{\sin x}$
- s)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sqrt{2} - 2 \cos x}{\sqrt{2} - 2 \sin x}$       t)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x - \cos x}{\cos 2x}$       u)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (\cos x)^2}{1 - \cos x}$
- v)  $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x}$       w)  $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1+|x|}{|x-1|}$
- x)  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{|x| - x^2}; \lim_{x \underset{<}{\rightarrow} 1} \frac{1}{|x| - x^2}; \lim_{x \underset{>}{\rightarrow} 1} \frac{1}{|x| - x^2}$       y)  $\lim_{x \rightarrow a} \frac{x^2 - 49}{2|x-a|}$

2. a)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x+1}{2x+1}$       b)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{-x^2 + 5}{x^3 + 2x}$       c)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{4x^2 - 9}{9 - x^2}$
- d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x}$       e)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^2 - 25}{a^2 - x^2}$       f)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{ax - |x|}{1-x}$
- g)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x+1}$       h)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sqrt{x^2 + 1}}{x+1}$

3. Untersuche f auf Stetigkeit und Differenzierbarkeit an der Stelle  $x_0$ :

- a)  $f(x) = |x|$ ;  $x_0 = 0$       b)  $f(x) = x|x|$ ;  $x_0 = 0$       c)  $f(x) = \frac{|x+2|}{x+2}$ ;  $x_0 = -2$
- d)  $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{für } x \leq 1 \\ 2x-1 & \text{für } x > 1 \end{cases}$ ;  $x_0 = 1$       e)  $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} + 1 & \text{für } 0 \leq x < 4 \\ 19 - x^2 & \text{für } 4 \leq x \end{cases}$ ;  $x_0 = 4$

Ergebnisse:

1. a) 0 b) 3 c) - d) 1 e) -1 f) 0 g) 1 h) -1 i) -1 j) 1 k) 0 l) 0 m) 0 n) 0 o) 2 p) -2 q) 2  
r) 0 s) -1 t)  $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$  u) 2 v) -1 w)  $\infty$  x)  $\infty; \infty; -\infty$  y)  $\infty$  für  $|a| > 7$ ;  $-\infty$  für  $|a| < 7$ ; ex. nicht für  $|a| = 7$
2. a)  $\frac{1}{2}$  b) 0 c) -4 d) 0 e) -1 f)  $-a-1$  g) 1 h) -1
3. a) j(0), n(90°) b) j(0), j'(0) c) n, n d) j(1), j'(2) e) j(3), n( $\approx 83^\circ$ )