Aufgabenblatt: Basis eines Vektorraums

17. Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}_1 = (1 \mid 2 \mid 0)$, $\vec{a}_2 = (-1 \mid 3 \mid 1)$ und $\vec{a}_3 = (1 \mid -13 \mid -3)$ aus dem Vektorraum $\mathbb{V}$ der reellen Tripel.
    a) Ist $\{\vec{a}_1; \vec{a}_2; \vec{a}_3\}$ eine Basis von $\mathbb{V}$?
    b) Welche Bedingung müssen a, b, c erfüllen, damit der Vektor $(a \mid b \mid c)$ als Linearkombination von $\vec{a}_1$, $\vec{a}_2$ und $\vec{a}_3$ dargestellt werden kann?

18. Durch $\vec{b}_1 = (2 \mid -1 \mid -4)$ und $\vec{b}_2 = (-3 \mid 0 \mid 2)$ wird ein Vektorraum $\mathbb{U}$ aufgespannt.
    a) Welche Dimension hat $\mathbb{U}$?
    b) Welche der folgenden Vektoren gehören dem Vektorraum $\mathbb{U}$ an:
    $\vec{a}_1 = (0 \mid -3 \mid -8)$, $\vec{a}_2 = (-1 \mid -1 \mid 3)$, $\vec{a}_3 = (1 \mid 0 \mid 0)$?

19. Es sind drei Vektoren aus dem geometrischen Vektorraum $\mathbb{V}$ gegeben. Prüfe nach, ob der von ihnen aufgespannte Vektorraum $\mathbb{U}$ der gesamte Vektorraum $\mathbb{V}$ ist. Welche Dimension hat $\mathbb{U}$?

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

20. Gib die Vektoren $\vec{a} = (-2 \mid 5 \mid 3)$ und $\vec{b} = (a \mid b \mid c)$ des Vektorraums der reellen Tripel in Koordinatenschreibweise an bezüglich der Basis
    a) $\{(1 \mid 0 \mid 0); (0 \mid 1 \mid 0); (0 \mid 0 \mid 1)\}$
    b) $\{(1 \mid 1 \mid 1); (1 \mid 1 \mid 0); (1 \mid 0 \mid 0)\}$

21. a) Zeige:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}; \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ bilden eine Basis des geometrischen Vektorraums $\mathbb{V}$.

    b) Berechne die Koordinaten des Vektors $\vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ bezüglich der Basis $\{\vec{a}; \vec{b}; \vec{c}\}$.

    Gib auch seine Komponenten an.

22. $\{\vec{b}_1; \vec{b}_2; \vec{b}_3\}$ sei eine Basis eines Vektorraums.
    Welcher zu dem Vektor $\vec{a} = 3 \cdot \vec{b}_1 + 4 \cdot \vec{b}_2 - 2 \cdot \vec{b}_3$ linear abhängige Vektor hat die Komponente $-2 \cdot \vec{b}_1$?

23. Berechne aus der Gleichung $3 \cdot \vec{a} + 5 \cdot \vec{b} - 4 \cdot \vec{c} = \vec{0}$ die Koordinaten von Vektor $\vec{a}$ bezüglich der Basis $\{\vec{b}; \vec{c}\}$ und des Vektors $\vec{b}$ bezüglich der Basis $\{\vec{a}; \vec{c}\}$.

Lu