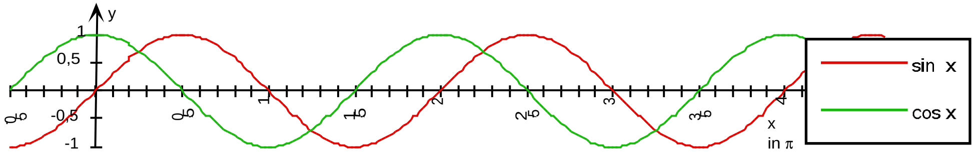
Kurvendiskussion von $f(x) = \sin x \cdot \cos x$

1. $\mathbb{D}_{max} = \mathbb{R}$

2. $f(0) = 0 \cdot 1 = 0$ Schnittpunkt mit der y-Achse: $S(0|0)$
   $f(x) = 0 \Rightarrow$ $\sin x \cdot \cos x = 0$
   1. Fall: $\sin x = 0 \Rightarrow x \in \{n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$
   2. Fall: $\cos x = 0 \Rightarrow x \in \{\frac{\pi}{2} + n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$



Damit sind (beide Fälle zusammen) alle Schnittpunkte mit der x-Achse: $N_n(n \cdot \frac{\pi}{2}|0)$ mit $n \in \mathbb{Z}$.

3. $f(-x) = \sin(-x) \cdot \cos(-x) = (-\sin x) \cdot (+\cos x) = -\sin x \cdot \cos x = -f(x)$.
   Damit hat der Graph von f eine Punktsymmetrie zum Ursprung.

4. Es handelt sich um periodische Funktionen mit gleicher Periode. Dadurch kann es keine Grenzwerte für $x \to \pm\infty$ geben.
   Da f keine Definitionslücken hat, sind keine weiteren Grenzwerte zu untersuchen.

5. Die Ableitung erfolgt mit der Produktregel:
   $f'(x) = \cos x \cdot \cos x + \sin x \cdot (-\sin x) = \cos^2 x - \sin^2 x$
   Bedingung für waagerechte Tangenten: $f'(x) = 0 \Rightarrow \cos^2 x - \sin^2 x = 0 \Rightarrow \cos^2 x = \sin^2 x$
   Dies ist erfüllt, wenn $\cos x = \sin x$ und wenn $\cos x = -\sin x$, also für alle $x \in \{\frac{\pi}{4} + n \cdot \frac{\pi}{2} \mid n \in \mathbb{Z}\}$
   Beide Teile der Funktion haben eine Periode von 2π, deshalb sollte die Monotonietabelle den Bereich $[0; 2\pi]$ abdecken.
   Vorsicht an den Rändern: $x < \frac{\pi}{4}$ oder $x > \frac{7\pi}{4}$ wäre falsch, da der Bereich nur bis zur nächsten waagerechten Tangente geht.

	...	$-\frac{\pi}{4}<x<\frac{\pi}{4}$	$x=\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{4}<x<\frac{3\pi}{4}$	$x=\frac{3\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}<x<\frac{5\pi}{4}$	$x=\frac{5\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{4}<x<\frac{7\pi}{4}$	$x=\frac{7\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}<x<\frac{9\pi}{4}$	...
sgn(f'(x))		+1	0	–1	0	+1	0	–1	0	+1	
Mon.		steig.	w.T.	fallend	w.T.	steig.	w.T.	fallend	w.T.	steig.	

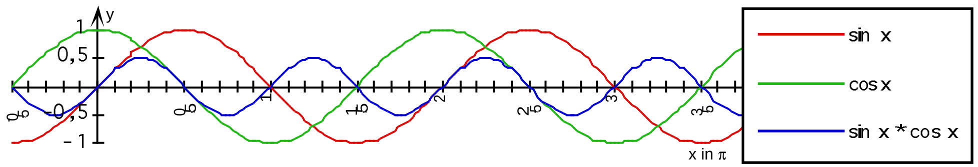
Testwerte:
$f'(0) = \cos^2(0) - \sin^2(0) = 1 - 0 = 1$ $f'(\frac{3\pi}{2}) = \cos^2(\frac{3\pi}{2}) - \sin^2(\frac{3\pi}{2}) = 0 - (-1)^2 = -1$
$f'(\frac{\pi}{2}) = \cos^2(\frac{\pi}{2}) - \sin^2(\frac{\pi}{2}) = 0 - 1 = -1$ $f'(2\pi) = \cos^2(2\pi) - \sin^2(2\pi) = 1 - 0 = 1$
$f'(\pi) = \cos^2(\pi) - \sin^2(\pi) = (-1)^2 - 0 = 1$
Damit ist f streng momoton steigend in den Intervallen $\left[-\frac{\pi}{4} + n \cdot \pi \; ; \; \frac{\pi}{4} + n \cdot \pi\right]$ mit $n \in \mathbb{Z}$
und streng monoton fallend in den Intervallen $\left[\frac{\pi}{4} + n \cdot \pi \; ; \; \frac{3\pi}{4} + n \cdot \pi\right]$ mit $n \in \mathbb{Z}$.
$f(\frac{\pi}{4}) = \sin(\frac{\pi}{4}) \cdot \cos(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}$, $f(\frac{5\pi}{4}) = \sin(\frac{5\pi}{4}) \cdot \cos(\frac{5\pi}{4}) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2}$
$f(\frac{3\pi}{4}) = \sin(\frac{3\pi}{4}) \cdot \cos(\frac{3\pi}{4}) = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{1}{2}$, $f(\frac{7\pi}{4}) = \sin(\frac{7\pi}{4}) \cdot \cos(\frac{7\pi}{4}) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2}$
Aus der Tabelle, der Periodizität und mit diesen Funktionswerten folgt für die Extrema:
Minima: $Min_n\left(\frac{3\pi}{4} + n \cdot \pi \;\middle|\; -\frac{1}{2}\right)$ mit $n \in \mathbb{Z}$; Maxima: $Max_n\left(\frac{\pi}{4} + n \cdot \pi \;\middle|\; \frac{1}{2}\right)$ mit $n \in \mathbb{Z}$

6. Die zweite Ableitung erfolgt mit der Kettenregel:
   $f''(x) = 2 \cdot \cos x \cdot (-\sin x) - 2 \cdot \sin x \cdot \cos x = -4 \cdot \sin x \cdot \cos x$
   Hinweis: Sind nur die Extrema gefragt (also keine Monotonie) kann man dafür auch mit der hinreichenden Bedingung arbeiten, da:
   $f''(\frac{\pi}{4}) = -4 \cdot \sin(\frac{\pi}{4}) \cdot \cos(\frac{\pi}{4}) = -4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = -2 < 0$
   $f''(\frac{3\pi}{4}) = -4 \cdot \sin(\frac{3\pi}{4}) \cdot \cos(\frac{3\pi}{4}) = -4 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = 2 > 0$
   $f''(\frac{5\pi}{4}) = -4 \cdot \sin(\frac{5\pi}{4}) \cdot \cos(\frac{5\pi}{4}) = -4 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -2 < 0$
   $f''(\frac{7\pi}{4}) = -4 \cdot \sin(\frac{7\pi}{4}) \cdot \cos(\frac{7\pi}{4}) = -4 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 2 > 0$
   Die zweite Ableitung hat ihre Nullstellen bei denselben x-Werten, wie die Nullstellen der ursprünglichen Funktion. Damit gibt es Flachpunkte bei allen $x \in \{n \cdot \frac{\pi}{2} \mid n \in \mathbb{Z}\}$.
   Für die Tabelle wird wieder der Bereich einer Periode abgedeckt:

	...	$-\frac{\pi}{2}<x<0$	$x=0$	$0<x<\frac{\pi}{2}$	$x=\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{2}<x<\pi$	$x=\pi$	$\pi<x<\frac{3\pi}{2}$	$x=\frac{3\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{2}<x<2\pi$	...
sgn(f''(x))		+1	0	–1	0	+1	0	–1	0	+1	
Krüm.		links	FP	rechts	FP	links	FP	rechts	FP	links	

Testwerte: $f''(\frac{\pi}{4})$, $f''(\frac{3\pi}{4})$, $f''(\frac{5\pi}{4})$, $f''(\frac{7\pi}{4})$ stehen schon oben. Es fehlt nur:
$f''(-\frac{\pi}{4}) = -4 \cdot \sin(-\frac{\pi}{4}) \cdot \cos(-\frac{\pi}{4}) = -4 \cdot \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = 2 > 0$
Damit ist der Graph von f rechtsgekrümmt in den Intervallen $\left[n \cdot \pi \; ; \; \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi\right]$ mit $n \in \mathbb{Z}$
und linksgekrümmt in den Intervallen $\left[-\frac{\pi}{2} + n \cdot \pi \; ; \; n \cdot \pi\right]$ mit $n \in \mathbb{Z}$.
Mit den Ergebnissen der Tabelle ist nachgewiesen, daß alle Schnittpunkte mit der x-Achse, also die Punkte $N_n(n \cdot \frac{\pi}{2}|0)$ mit $n \in \mathbb{Z}$, auch Wendepunkte sind.

7.



Lu