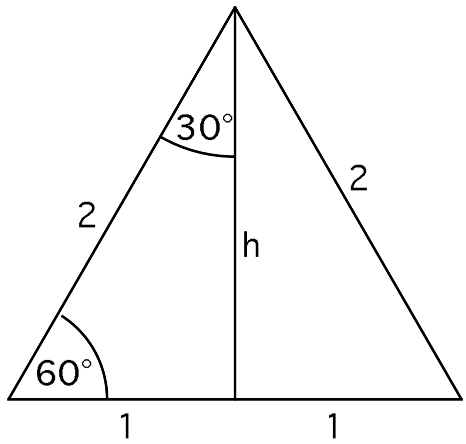
Lösungen zu den Aufgaben zur Trigonometrie

1. Gleichseitiges Dreieck mit Kantenlänge 2.

   Berechnung der Höhe: $h = \sqrt{2^2 - 1^2} = \sqrt{3}$

   a) $\sin\frac{\pi}{3} = \sin 60° = \frac{h}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$

   b) $\tan\frac{\pi}{6} = \tan 30° = \frac{1}{h} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}$



2. Einen ersten Winkel bekommt man aus dem Dreieck aus Aufgabe 1: $\sin 30° = \frac{1}{2}$

   $\sin(180° - \alpha) = \sin\alpha \quad \Rightarrow \quad \sin 150° = \sin 30°$

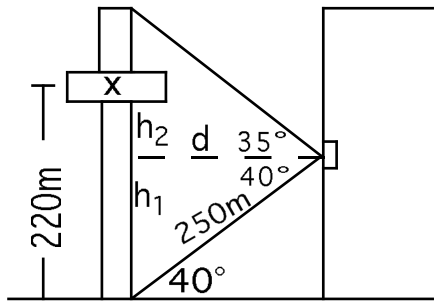
   $\sin(\alpha - 360°) = \sin\alpha \quad \Rightarrow \quad \sin(-330°) = \sin 30°$; $\sin(-210°) = \sin 150° = \sin 30°$

   Also: $\alpha \in \{-330°; -210°; 30°; 150°\}$

3. a) $\sin 40° = \frac{h_1}{250\,\text{m}} \quad \Leftrightarrow \quad h_1 = 250\,\text{m} \cdot \sin 40° \approx 160{,}7\,\text{m}$

   $\cos 40° = \frac{d}{250\,\text{m}} \quad \Leftrightarrow \quad d = 250\,\text{m} \cdot \cos 40° \approx 191{,}5\,\text{m}$

   $\tan 35° = \frac{h_2}{d} \quad \Leftrightarrow \quad h_2 = 191{,}5\,\text{m} \cdot \tan 35° \approx 134{,}1\,\text{m}$



   b) Im rechtwinkligen Dreieck vom Mädchen horizontal zur Mitte des Turms und hoch zum Jüngling.

   Einfachster Weg zur Bestimmung des Abstands a:

   Pythagoras: $a = \sqrt{(220\,\text{m} - h_1)^2 + (d + 15\,\text{m})^2} \approx \sqrt{(59{,}3\,\text{m})^2 + (206{,}5\,\text{m})^2} \approx 214{,}8\,\text{m}$

   Weg mit Trigonometrie:
   Bestimmung des Winkels α vom Mädchen zum Jüngling zur Horizontalen:

   $\tan\alpha = \frac{220\,\text{m} - h_2}{d + 15\,\text{m}} \approx \frac{59{,}3\,\text{m}}{206{,}5\,\text{m}} \approx 0{,}28717 \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 16°$

   Bestimmung von a: $\sin\alpha = \frac{220\,\text{m} - h_2}{a} \quad \Rightarrow \quad a = \frac{220\,\text{m} - h_2}{\sin\alpha} \approx \frac{59{,}3\,\text{m}}{\sin 16°} \approx 215\,\text{m}$

4. Kosinussatz im gezeichneten Dreieck:

   $\overline{AD2}^2 = 80^2 + 586^2 - 2 \cdot 80 \cdot 586 \cdot \cos(180° - 35°) \approx 426599{,}7 \quad \Rightarrow \quad \overline{AD2} \approx 653{,}1$

   Sinussatz im gezeichneten Dreieck:

   $\frac{\sin\alpha}{586} = \frac{\sin(180° - 35°)}{653{,}1} \quad \Leftrightarrow \quad \sin\alpha = \frac{586}{653{,}1} \cdot \sin 145° \approx 0{,}5146 \quad \Rightarrow \quad \alpha \approx 31°$

   Er sieht ihn 31° über dem Horizont in einer Entfernung von 653 km.

5. a) $\cos 2\alpha = \cos^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - \sin^2\alpha - \sin^2\alpha = 1 - 2\sin^2\alpha$

   Setze: $\beta = 2\alpha \quad \Rightarrow \quad \cos\beta = 1 - 2\sin^2\frac{\beta}{2} \quad \Leftrightarrow \quad 2\sin^2\frac{\beta}{2} = 1 - \cos\beta \quad \Leftrightarrow \quad \sin^2\frac{\beta}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos\beta)$

   Schreibt man α statt β, folgt die gegebene Gleichung.

   b) Mit der Formel aus a):

   $\sin^2 22{,}5° = \frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \quad \Rightarrow \quad \sin 22{,}5° = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2} - 1}{\sqrt{2}}} = \sqrt{\frac{1}{2} \cdot \frac{2 - \sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}}$