Lösungen zu den Extremwertaufgaben

1. Seite senkrecht zur Mauer: x; Seite parallel zur Mauer: 200 – 2x
   Flächenfunktion: $f(x) = x\,(200 - 2x) = -2x^2 + 200x$
   Maximum für $x = 50$
   Ergebnis: Seiten senkrecht zur Mauer: 50 m; Seite parallel zur Mauer: 100 m

2. $V = a^2 \cdot h \;\Leftrightarrow\; h = \dfrac{V}{a^2}$ $\qquad A = a^2 + 4ah = a^2 + 4\dfrac{V}{a}$

   $A'(a) = 2a - 4\dfrac{V}{a^2} = 0 \;\Rightarrow\; 2a^3 = 4V \;\Leftrightarrow\; a^3 = 1000 \;\Rightarrow\; a = 10 \;\Rightarrow\; h = 5$

   $A''(a) = a + 8\dfrac{V}{a^3} \;\Rightarrow\; A''(10) = 10 + 8\dfrac{500}{1000} = 14 > 0 \;\Rightarrow$ Minimum

   Ergebnis: Kantenlänge der Grundseite: 10 cm: Höhe der Schachtel: 5 cm

3. Kantenlänge der Quadrate: 2r $\qquad$ Rechteck: Länge: $2\pi r$; Breite: h

   Volumen: $V = \pi r^2 \cdot h \;\Leftrightarrow\; h = \dfrac{V}{\pi r^2}$

   Kosten sind proportional zur verwendeten Metallfläche:

   $A = 2\cdot(2r)^2 + 2\pi r \cdot h = 8r^2 + 2\pi r\dfrac{V}{\pi r^2} = 8r^2 + \dfrac{250}{r}$

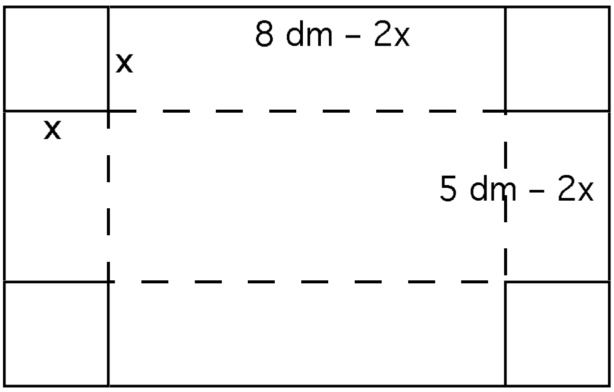
   $A'(r) = 16r - \dfrac{250}{r^2}$

   $A'(r) = 0 \;\Rightarrow\; 16r = \dfrac{250}{r^2} \;\Leftrightarrow\; r^3 = \dfrac{125}{8} \;\Rightarrow\; r = \dfrac{5}{2} = 2{,}5$; $\quad h = \dfrac{125}{\pi\cdot\frac{25}{4}} = \dfrac{20}{\pi} \approx 6{,}37$

   $A''(r) = 16 + \dfrac{500}{r^3} \;\Rightarrow\; A''\left(\frac{5}{2}\right) = 16 + \dfrac{500}{\frac{125}{8}} = 48 > 0 \;\Rightarrow$ Minimum

   Ergebnis: Radius 2,5 cm, Höhe (gerundet) 6,37 cm

4. $V(x) = (8-2x)(5-2x)\,x = 4x^3 - 26x^2 + 40x$



   $V'(x) = 12x^2 - 52x + 40$ $\qquad V'(x) = 0 \;\Rightarrow$

   $12x^2 - 52x + 40 = 0 \;\Leftrightarrow\; 3x^2 - 13x + 10 = 0$

   $x_{1;2} = \dfrac{13 \pm \sqrt{169-120}}{6} = \dfrac{13 \pm 7}{6} = \begin{cases} 3\frac{1}{3} \\ 1 \end{cases}$

   $V''(x) = 24x - 52$

   $V''\left(3\frac{1}{3}\right) = 24\cdot 3\frac{1}{3} - 52 = 28 \;\Rightarrow$ Minimum

   $V''(1) = 24\cdot 1 - 52 = -28 \;\Rightarrow$ Maximum

   Es müssen Quadrate der Kantenlänge 1 dm abgeschnitten werden, denn:
   1. nur hierfür gibt es ein Maximum
   2. zweimal $3\frac{1}{3}$ dm lassen sich an der Schmalseite nicht abschneiden