

Mathematische Grundlagen

Addition und Subtraktion

Wenn mehrere Terme verrechnet werden sollen, muß 'Punkt vor Strich' beachtet werden. z.B. bei $7 + 2x$ ist die 2 mit einer Multiplikation mit dem x verbunden, $7 + 2x$ läßt sich also nicht zu $9x$ zusammenfassen.

Folgerung: nur gleichartige Terme lassen sich verrechnen.

Vorsicht: auch z.B. x und x^3 sind verschieden und lassen sich nicht zusammenfassen.

Also: $7x + 2x^3 = 7 \cdot x + 2 \cdot x \cdot x \cdot x$ läßt sich nicht weiter verrechnen, schon gar nicht zu einem $9x^4$. Änderungen sind sonst nur noch mit dem Distributivgesetz möglich, z.B.: $7x + 2x^3 = x(7 + 2x^2)$.

Multiplikation und Potenzen

Potenzen sind eine Kurzschreibweise für die Multiplikation. Wer damit unsicher ist, sollte es immer entsprechend umschreiben.

Der Exponent bezieht sich nur auf das, wohinter er steht. Beispiele:

$2x^3$: der Exponent bezieht sich nur auf das x, also:

$$2x^3 = 2 \cdot x \cdot x \cdot x$$

$(2x)^3$: der Exponent bezieht sich auf die Klammer, also:

$$(2x)^3 = 2x \cdot 2x \cdot 2x = 2 \cdot x \cdot 2 \cdot x \cdot 2 \cdot x \\ = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot x \cdot x \cdot x = 2^3 x^3 = 8x^3$$

$$(2+x)^3 = (2+x) \cdot (2+x) \cdot (2+x) = (4+4x+x^2) \cdot (2+x) = 8+4x+8x+4x^2+2x^2+x^3 = 8+12x+6x^2+x^3$$

Der Vergleich von $(2 \cdot x)^3 = 2^3 \cdot x^3$ und $(2+x)^3 = 8+12x+6x^2+x^3$ ergibt:

Nur wenn sich in der Klammer eine Punktrechnung befindet, kann man den Exponenten auf die einzelnen Terme aufteilen. Sonst ist es falsch!!

Beim Produkt von Klammern wird jeder Summand in der ersten Klammer mit jedem Summanden der zweiten multipliziert.

Enthalten die Klammern dagegen Produkte, kann man sie weglassen (Assoziativgesetz), aber nicht jeden Term der einen Klammer mit jedem der anderen multiplizieren!

Beispiele: $(a+b) \cdot (c+d) = ac + ad + bc + bd$

$$(a \cdot b) \cdot (c \cdot d) = a \cdot b \cdot c \cdot d = abcd \quad \text{und nicht:} \quad (a \cdot b) \cdot (c \cdot d) = ac \cdot ad \cdot bc \cdot bd$$

Brüche

Es gibt nur zwei Möglichkeiten, Brüche (für weiteres Verrechnen) umzuformen, ohne daß sie ihren Wert verändern (Dies ist wichtig. Man kann nicht nach Belieben Werte ändern, nur weil sie sich dann leichter rechnen lassen; z.B. aus der Rechnung $456 + 789$ kann man auch nicht $456 + 44$ machen, nur weil das dann besser geht!).

1. Möglichkeit: Zähler und/oder Nenner in sich umformen (z.B. mit Hilfe des Distributivgesetzes ausklammern, oder gleichartige Summenterme zusammenfassen), wobei die Rechenregeln (wie die oben aufgeführten) zu beachten sind.

2. Möglichkeit: Erweitern oder Kürzen.

Erweitern: hier ist darauf zu achten, daß jeweils der ganze Zähler bzw. Nenner mit dem ganzen Erweiterungsterm zu multiplizieren ist, d.h. ohne Klammern wird es oft falsch!

Beispiel: $\frac{x+1}{x-1} = \frac{(x+1) \cdot (x+1)}{(x-1) \cdot (x+1)}$ ist richtig, dagegen $\frac{x+1}{x-1} = \frac{(x+1) \cdot x+1}{(x-1) \cdot x+1}$ ist falsch.

Kürzen: kürzen kann man nur aus Produkten. Deshalb immer vor dem Kürzen überprüfen, ob es sich im Zähler und im Nenner um ein Produkt handelt. Wenn nur ein Teil davon ein Produkt ist, das ganze aber insgesamt eine Summe oder Differenz, dann kann man direkt nicht kürzen! Dann muß man zuerst die Summe/Differenz in ein Produkt umwandeln (z.B. durch binomische Formeln oder das Distributivgesetz, d.h. ausklammern).

Ein Kürzen ist nie ein Wegstreichen, sondern immer eine Division von Zähler und Nenner durch denselben Term (evtl. wie beim Erweitern: Klammern setzen).

Typischer Fehler: $\frac{x^2}{x^3 \cdot (x+1)} = \frac{0}{x \cdot (x+1)} = 0$ Dies kann beim Wegstreichen passieren.

Richtig ist eine Division: $\frac{x^2}{x^3 \cdot (x+1)} = \frac{x^2 : x^2}{[x^3 \cdot (x+1)] : x^2} = \frac{1}{x \cdot (x+1)}$

Außerdem wichtig: Im Nenner eines Bruches kann nie eine 0 stehen, im Zähler dagegen schon.