Lösungen zu Aufgaben zum freien Fall und zu den Newtonschen Gesetzen

1. geg.: h = 5,0(0) m, $v_0 = 0$, $\Delta t_2 = 5{,}0$ s
   a) ges.: x ; freier Fall: $v^2 = v_0^2 + 2ax = 2\cdot g\cdot h = 2\cdot 10\frac{m}{s^2}\cdot 5m = 100\frac{m^2}{s^2} \Rightarrow v = 10\frac{m}{s}$
   See: $v = \frac{\Delta x}{\Delta t_2} = \frac{x-0}{\Delta t_2} = \frac{x}{\Delta t_2} \Rightarrow x = v\cdot\Delta t_2 = 10\frac{m}{s}\cdot 5s = 50m$
   b) ges.: $\bar{v}$ Im freien Fall: $v = a\cdot t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{v}{a} = \frac{v}{g} = \frac{10\frac{m}{s}}{10\frac{m}{s^2}} = 1{,}0s$
   gesamt: $\bar{v} = \frac{x_{ges}}{t_{ges}} = \frac{x+h}{t_1+\Delta t_2} = \frac{50m+5m}{1s+5s} = 9{,}2\frac{m}{s}$
   c) geg.: x = 55 m, t = 5,0 s ges.: v_0
   $x = v_0\cdot t + \frac{1}{2}\cdot g\cdot t^2 \Leftrightarrow v_0 = \frac{x}{t} - \frac{1}{2}\cdot g\cdot t = \frac{55m}{5s} - \frac{1}{2}\cdot 10\frac{m}{s^2}\cdot 5s = -14\frac{m}{s}$, d.h. mit $14\frac{m}{s}$ nach oben
2. Fenster: geg.: $x_1 = 1{,}2$ m, t = 0,125 s, a = g ges.: v_0, v
   $x_2 = v_0\cdot t + \frac{1}{2}gt^2 \Leftrightarrow v_0 = \frac{x_2}{t} - \frac{1}{2}gt = \frac{1{,}2m}{0{,}125s} - \frac{1}{2}\cdot 10\frac{m}{s^2}\cdot 0{,}125s = 8{,}975\frac{m}{s}$
   $v = v_0 + g\cdot t = 8{,}975\frac{m}{s} + 10\frac{m}{s^2}\cdot 0{,}125s = 10{,}225\frac{m}{s}$
   oben: geg.: $v_0 = 0$, $v = 8{,}975\frac{m}{s}$, a = g ges.: x_1
   $v^2 = 2\cdot g\cdot x_1 \Leftrightarrow x_1 = \frac{v^2}{2\cdot g} = \frac{\left(8{,}975\frac{m}{s}\right)^2}{2\cdot 10\frac{m}{s^2}} = 4{,}0m$
   unten: geg.: $t_3 = 1{,}0$ s, $v_0 = 10{,}225\frac{m}{s}$, a = g ges.: x_3
   $x_3 = v_0\cdot t_3 + \frac{1}{2}\cdot g\cdot t_3^2 = 10{,}225\frac{m}{s}\cdot 1s + \frac{1}{2}\cdot 10\frac{m}{s^2}\cdot(1s)^2 = 15{,}2m$
   Ergebnis: $x = x_1 + x_2 + x_3 = 4{,}0m + 1{,}2m + 15{,}2m = 20{,}4m \approx 20m$
3. geg.: $\Delta t_2 = 1s$. $\Delta x_2 = \frac{x}{2}$, $x_1 = \frac{x}{2}$, $v_0 = 0$, a = g ges.: x, t
   erste Hälfte: $x_1 = \frac{1}{2}\cdot g\cdot t_1^2 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{1}{2}\cdot g\cdot t_1^2 \Leftrightarrow x = g\cdot t_1^2$ (*)
   gesamt: $x = \frac{1}{2}\cdot g\cdot t^2 = \frac{1}{2}\cdot g\cdot(t_1+\Delta t_2)^2 = \frac{1}{2}\cdot g\cdot\left(t_1^2 + 2\cdot t_1\cdot\Delta t_2 + \Delta t_2^2\right)^2$ (**)
   Aus (*) und (**) folgt: $\frac{1}{2}\cdot g\cdot\left(t_1^2 + 2\cdot t_1\cdot\Delta t_2 + \Delta t_2^2\right)^2 = g\cdot t_1^2 \Leftrightarrow$
   $t_1^2 + 2\cdot t_1\cdot\Delta t_2 + \Delta t_2^2 = 2\cdot t_1^2 \Leftrightarrow t_1^2 - 2\cdot t_1\cdot\Delta t_2 - \Delta t_2^2 = 0 \Rightarrow$
   $$t_1 = \frac{2\Delta t_2 \pm\sqrt{4\cdot\Delta t_2^2 + 4\cdot\Delta t_2^2}}{2} = \frac{2\cdot\left(\Delta t_2 \pm\sqrt{2\Delta t_2^2}\right)}{2} = \Delta t_2 \pm\sqrt{2\Delta t_2^2} = 1s \pm\sqrt{2s^2} = \begin{cases}(1+\sqrt{2})s\\(1-\sqrt{2})s\end{cases}$$
   Da das Ergebnis positiv sein muss, gilt nur die erste Lösung. Hierfür folgt:
   $t = t_1 + \Delta t_2 = (2+\sqrt{2})s = 3{,}4s$ und $x = \frac{1}{2}\cdot g\cdot t^2 = \frac{1}{2}\cdot 10\frac{m}{s^2}\cdot\left[(2+\sqrt{2})s\right]^2 = 58m$
4. geg.: $\mu = 0{,}030$, $v_0 = 5{,}0\frac{m}{s}$, v = 0 ges.: x $F_B = -F_R \Leftrightarrow m\cdot a = -\mu\cdot m\cdot g \Leftrightarrow a = -\mu\cdot g$
   $$v^2 = v_0^2 + 2ax \Leftrightarrow x = \frac{v^2 - v_0^2}{2\cdot a} = \frac{0-\left(5\frac{m}{s}\right)^2}{2\cdot\left(-0{,}03\cdot 10\frac{m}{s^2}\right)} = 42m$$
5. geg.: $F_G = 1500N$ ges.: m $F_G = m\cdot g \Rightarrow m = \frac{F_G}{g} = \frac{1500N}{9{,}81\frac{m}{s^2}} = 153kg$
6. Wenn er mit konstanter Geschwindigkeit fällt, ist $a = 0$. Die Höhe dieser Geschwindigkeit spielt dabei keine Rolle. Wenn $a = 0$, bedeutet dies, dass sich die Kräfte, die auf ihn wirken, gegenseitig aufheben. Dies bedeutet, dass die Luftreibung denselben Betrag haben muss, wie die Gewichtskraft. $\Rightarrow F_R = F_G = m\cdot g = 90kg\cdot 9{,}81\frac{m}{s^2} = 882{,}9N \approx 0{,}88kN$
7. a) Aus den Daten muss man zunächst die Beschleunigung berechnen, bevor man die be schleunigende Kraft folgern kann. geg.: m = 2300 kg, $v_0 = 0$, x = 200 m, t = 28 s ges.: a
   $x = v_0\cdot t + \frac{1}{2}at^2 = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow a = \frac{2x}{t^2} = \frac{400m}{784s^2} = 0{,}51\frac{m}{s^2}$
   ges.: F $F = m\cdot a = 2300kg\cdot 0{,}51\frac{m}{s^2} = 1173N \approx 1{,}2kN$
   b) ges.: v $v = v_0 + a\cdot t = a\cdot t = 0{,}51\frac{m}{s^2}\cdot 28s = 14{,}28\frac{m}{s} = 51{,}4\frac{km}{h} \approx 51\frac{km}{h}$
8. a) geg.: m = 500 kg ges.: F $F = F_G = m\cdot g = 500kg\cdot 9{,}81\frac{m}{s^2} = 4{,}91kN$
   b) Die Kraft muss größer sein: $F = F_G + m\cdot a = 4{,}91kN + 500kg\cdot 2{,}0\frac{m}{s^2} = 5{,}91kN \approx 5{,}9kN$
   c) $F = F_G + m\cdot a = m\cdot g + m\cdot a \Leftrightarrow a = \frac{F - m\cdot g}{m} = \frac{5{,}91kN - 570kg\cdot 9{,}81\frac{m}{s^2}}{570kg} = 0{,}56\frac{m}{s^2}$
   d) $F = m\cdot g + m\cdot a = m\cdot(g+a) = 570kg\cdot\left(9{,}81\frac{m}{s^2} - 1{,}2\frac{m}{s^2}\right) = 4{,}9kN$
9. geg.: m = 17 kg, α = 30°
   a) In dem Augenblick, wo der Körper gerade zu rutschen anfängt, ist die Grenzposition erreicht, in der sich die Hangabtriebskraft und die Reibungskraft gegenseitig aufheben. Für 30° gilt also:
   $F_R = F_H \Rightarrow \mu\cdot F_N = F_H \Rightarrow \mu = \frac{F_H}{F_N} = \frac{m\cdot g\cdot\sin\alpha}{m\cdot g\cdot\cos\alpha} = \tan\alpha = \tan 30° = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}58$
   b) Solange der Körper in Ruhe ist, spricht man von Haftreibung, wenn er rutscht von Gleitreibung. Der Gleitreibungskoeffizient ist immer etwas kleiner als der Haftreibungskoeffizient. Hier ist er: $\mu_g = 0{,}86\cdot\mu = 0{,}86\cdot\frac{1}{\sqrt{3}} = 0{,}4965 \approx 0{,}50$
   Die beschleunigende Kraft ist:
   $F_a = F_H - F_R = mg\sin\alpha - \mu_g mg\cos\alpha = 17kg\cdot 10\frac{m}{s^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} - 0{,}4965\cdot 17kg\cdot 10\frac{m}{s^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}} = 60{,}5N$
   Damit folgt für die Beschleunigung: $F_a = ma \Rightarrow a = \frac{F_a}{m} = \frac{60{,}1N}{17kg} = 3{,}535\frac{m}{s^2}$
   t und v folgen jetzt mit den Bewegungsgleichungen:
   $x = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow t^2 = \frac{2x}{a} = \frac{4m}{3{,}535\frac{m}{s^2}} = 1{,}13s^2 \Rightarrow t = 1{,}06s \approx 1{,}1s$
   $v = at = 3{,}535\frac{m}{s^2}\cdot 1{,}06s = 3{,}8\frac{m}{s}$
   c) Eine größere Masse bedeutet, dass die beschleunigende Kraft den Hang hinunter größer ist. Gleichzeitig muss aber auch mehr Masse bewegt werden. Diese Effekte heben sich gegenseitig auf, wie die direkte Herleitung der Beschleunigung zeigt:
   $a = \frac{F_H - F_R}{m} = \frac{mg\sin\alpha - \mu mg\cos\alpha}{m} = \frac{m(g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha)}{m} = g\sin\alpha - \mu g\cos\alpha$
   Da sich die Masse kürzt, hat sie keinen Effekt. Der Körper kommt also mit derselben Geschwindigkeit an.
   d) Da sich der Körper jetzt nach oben bewegt, wirkt die Reibungskraft jetzt nach unten. Es muss also gegen die Hangabtriebskraft und die Reibung gezogen werden. Zusätzlich wird noch beschleunigt. Insgesamt ergibt sich für die ziehende Kraft:
   $F = F_H + F_R + ma = mg\sin\alpha + \mu_g mg\cos\alpha + ma$
   $= 17kg\cdot 10\frac{m}{s^2}\cdot\sin 45° + 0{,}5\cdot 17kg\cdot 10\frac{m}{s^2}\cdot\cos 45° + 17kg\cdot 1{,}4\frac{m}{s^2}$
   $= 120N + 60N + 24N = 204N \approx 0{,}20kN$
10. geg.: m = 75,0 kg, $x_1 = 60{,}0$ m, $\alpha_1 = 25{,}0°$, μ = 0,1051
    a) ges.: F_1 $F_1 = F_H - F_R = m\cdot g\cdot\sin\alpha_1 - \mu\cdot m\cdot g\cdot\cos\alpha_1 = m\cdot g\cdot(\sin\alpha_1 - \mu\cdot\cos\alpha_1)$
    $= 75kg\cdot 9{,}81\frac{m}{s^2}\cdot(\sin 25° - 0{,}1051\cdot\cos 25°) = 241N$
    b) ges.: v_1 $x = \frac{1}{2}at_1^2 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}\frac{F_1}{m}t_1^2 \Leftrightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2\cdot x\cdot m}{F_1}} = \sqrt{\frac{2\cdot 60m\cdot 75kg}{241N}} = 6{,}11s$
    $v_1^2 = 2\cdot a\cdot x = 2\cdot\frac{F_1}{m}\cdot x = 2\cdot\frac{241N}{75kg}\cdot 60m = 385{,}6\frac{m^2}{s^2} \Rightarrow v_1 = 19{,}6\frac{m}{s}\ \left(=70{,}7\frac{km}{h}\right)$
    c) geg.: v_2 = const., x_2 = 80 m ges.: α_2
    v_2 = const. $\Rightarrow F_H = F_R \Leftrightarrow m\cdot g\cdot\sin\alpha_2 = \mu\cdot m\cdot g\cdot\cos\alpha_2$
    $\Leftrightarrow \mu = \frac{\sin\alpha_2}{\cos\alpha_2} = \tan\alpha_2 \Rightarrow \alpha_2 = \arctan\mu = \arctan 0{,}1051 = 6{,}00°$
    d) geg.: $F_3 = -F_R$, $v_{3_0} = v_2 = v_1 = 19{,}6\frac{m}{s}$, $v_3 = 0$ ges.: x_{ges}
    $m\cdot a = -\mu\cdot m\cdot g \Leftrightarrow a = -\mu\cdot g = -0{,}1051\cdot 9{,}81\frac{m}{s^2} = -1{,}031\frac{m}{s^2}$
    $$v_3^2 = v_{3_0}^2 + 2ax_3 \Leftrightarrow x_3 = \frac{v_3^2 - v_{3_0}^2}{2a} = \frac{0-\left(19{,}6\frac{m}{s}\right)^2}{2\cdot\left(-1{,}031\frac{m}{s^2}\right)} = 186m$$
    $x_{ges} = x_1 + x_2 + x_3$ = 60,0 m + 80,0 m + 186 m = 326 m