Lösungen zu den Übungsaufgaben zur harmonischen Schwingung

1. $T = T_K = 2\pi\sqrt{\frac{\ell_K}{g_K}} \quad \Rightarrow \quad \ell_K = \frac{T_K{}^2 \cdot g_K}{4\pi^2} = \frac{(2\,s)^2 \cdot 9{,}78\,\frac{m}{s^2}}{4\pi^2} = 0{,}991\,m = 99{,}1\,cm$

   $T = T_A = 2\pi\sqrt{\frac{\ell_A}{g_A}} \quad \Rightarrow \quad \ell_A = \frac{T_A{}^2 \cdot g_A}{4\pi^2} = \frac{(2\,s)^2 \cdot 9{,}83\,\frac{m}{s^2}}{4\pi^2} = 0{,}996\,m = 99{,}6\,cm$

   Er muss es um 5 mm nach unten verschieben.

2. Wenn man das Floß um eine Tiefe x ins Wasser eintaucht, ist die rückstellende Kraft gleich der Gewichtskraft des dabei verdrängten Wassers:

   $F = -m_W\, g = -\rho_W \cdot V_W \cdot g = -\rho_W \cdot a^2 \cdot x \cdot g = -\left(\rho_W \cdot a^2 \cdot g\right) \cdot x$

   Dies hat die Form $F = -k \cdot x$ mit $k = \rho_W \cdot a^2 \cdot g$

   $\Rightarrow$ es handelt sich um eine harmonische Schwingung

   $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\rho_W \cdot a^2 \cdot g}} = 2\pi\sqrt{\frac{400\,kg}{1000\,\frac{kg}{m^3} \cdot (2\,m)^2 \cdot 9{,}81\,\frac{m}{s^2}}} = 0{,}63\,s$

Buch S. 125 Nr. 1

geg.: $m = 0{,}050$ kg; $T = \frac{10}{8}\,s = 1{,}25\,s \approx 1{,}3\,s$; $A = \frac{1}{2} \cdot 18\,cm = 9{,}0\,cm$

a) geg.: $t = 8{,}0\,s = 6 \cdot T + 0{,}5\,s$

   $x(t) = x(t-6T) = A \cdot \sin(\omega\,(t-6T)) = A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot (t-6T)\right) = 9\,cm \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{1{,}25\,s} \cdot 0{,}5\,s\right) = 5{,}3\,cm$

b) $v(t) = v(t-6T) = \omega A \cdot \cos(\omega\,(t-6T)) = \frac{2\pi}{T} A \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{T} \cdot (t-6T)\right)$

   $= \frac{2\pi}{1{,}25\,s} \cdot 0{,}09\,m \cdot \cos\left(\frac{2\pi}{1{,}25\,s} \cdot 0{,}5\,s\right) = -0{,}37\,\frac{m}{s^2}$

c) $v_{max} = \omega A = \frac{2\pi}{T} \cdot A = \frac{2\pi}{1{,}25\,s} \cdot 0{,}09\,m = 0{,}45\,\frac{m}{s}$

   $a_{max} = \omega^2 A = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot A = \left(\frac{2\pi}{1{,}25\,s}\right)^2 \cdot 0{,}09\,m = 2{,}274\,\frac{m}{s^2} \approx 2{,}3\,\frac{m}{s^2}$

d) maximale Geschwindigkeitsbeträge: bei jedem Durchgang durch die Ruhelage, d.h. zu den Zeiten: 0 s; $\frac{1}{2}$T; T; $1\frac{1}{2}$T; 2T; ... , d.h. zu den Zeiten $t = n \cdot \frac{1}{2}T$ mit $n \in \mathbb{N}_0$

   maximale Beschleunigungsbeträge: bei jedem Durchgang durch einen Umkehrpunkt, d.h. zu den Zeiten: $\frac{1}{4}$T; $\frac{3}{4}$T; $\frac{5}{4}$T; $\frac{7}{4}$T; $\frac{9}{4}$T; ... , d.h. zu den Zeiten $t = (2n+1) \cdot \frac{1}{4}T$ mit $n \in \mathbb{N}_0$

e) $a(t) = a(t-6T) = -\omega^2 A \cdot \sin(\omega\,(t-6T)) = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 A \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot (t-6T)\right)$

   $= -\left(\frac{2\pi}{1{,}25\,s}\right)^2 \cdot 0{,}09\,m \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{1{,}25\,s} \cdot 0{,}5\,s\right) = -1{,}34\,\frac{m}{s^2}$

   $F(t) = m \cdot a(t) = 0{,}05\,kg \cdot \left(-1{,}34\,\frac{m}{s^2}\right) = 0{,}067\,N = 67\,mN \quad \left(= 6{,}7 \cdot 10^{-2}\,N\right)$

f) Die rückstellende Kraft ist maximal, wenn die Beschleunigung maximal ist (vgl. d).

g) $F_{max} = m \cdot a_{max} = 0{,}05\,kg \cdot 2{,}274\,\frac{m}{s^2} = 0{,}11\,N$