Lösung zur 2. Schulaufgabe aus der Mathematik, Klasse 11c, 20.1.04

Gruppe A

1. a) $\mathbb{D}_{max} = \mathbb{R}$

   b) Nullstellen: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}(x+3)^2\,(x^2 - 2x + 3) = 0$ 1. Fall: $x + 3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = -3$

   2. Fall: $x^2 - 2x + 3 = 0 \Rightarrow x_{2;3} = \frac{2 \pm \sqrt{4-12}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-8}}{2} \Rightarrow$ keine Lösung

   $\Rightarrow$ keine weiteren Nullstellen

   Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = \frac{1}{3} \cdot 3^2 \cdot 3 = 9 \Rightarrow S(0 \mid 9)$

   c) Symmetrie: $f(-x) = \frac{1}{3}(-x+3)^2\left(x^2 + 2x + 3\right)\begin{cases} \neq f(x) \\ \neq -f(x) \end{cases} \Rightarrow$ keine bekannte Symmetrie

   d) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$

   e) Monotonie: $f(x) = \frac{1}{3}(x^2 + 6x + 9)\,(x^2 - 2x + 3) = \frac{1}{3}\,(x^4 + 4x^3 + 27)$

   $\Rightarrow f'(x) = \frac{4}{3}x^3 + 4x^2 = \frac{4}{3}x^2\,(x+3)$ $f'(x) = 0 \Rightarrow x_2 = 0;\; x_3 = -3$

Monotonietabelle	$x < -3$	$x = -3$	$-3 < x < 0$	$x = 0$	$x > 0$
Vorzeichen von f‘	–	0	+	0	+
Steigung von f	fallend	wT	steigend	wT	steigend

   Testwerte: $f'(-4) = \frac{4}{3}(-4)^2 \cdot (-1) < 0$; $f'(-1) = \frac{4}{3}(-1)^2 \cdot 2 > 0$; $f'(1) = \frac{4}{3}(1)^2 \cdot 4 > 0$

   Der Graph ist streng monoton fallend in $]-\infty; -3]$ und streng mon. steigend in $[-3; \infty[$.

   $f(-3) = 0 \Rightarrow TIP(-3 \mid 0)$; $f(0) = 9 \Rightarrow TEP(0 \mid 9)$

   f) Krümmung: $f''(x) = 4x^2 + 8x = 4x\,(x+2)$ $f''(x) = 0 \Rightarrow x_4 = -2;\; x_5 = 0$

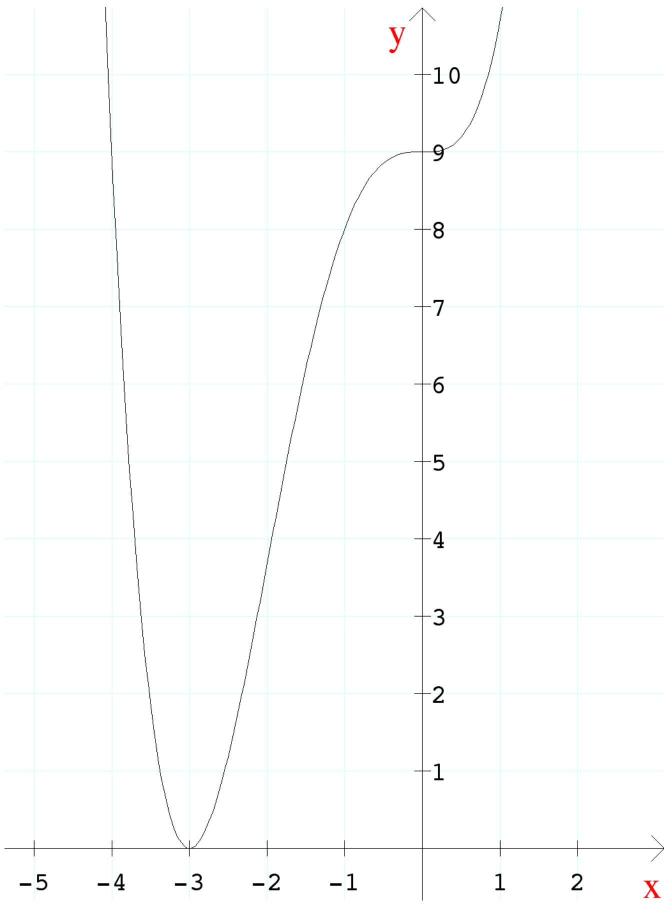
Krümmungstabelle	$x < -2$	$x = -2$	$-2 < x < 0$	$x = 0$	$x > 0$
Vorzeichen von f“	+	0	–	0	+
Krümmung von f	links	FP	rechts	FP	links

   Testwerte: $f''(-3) = 4 \cdot (-3) \cdot (-1) > 0$; $f''(-1) = 4 \cdot (-1) \cdot 1 < 0$; $f''(1) = 4 \cdot 1 \cdot 3 > 0$;

   Der Graph ist linksgekrümmt in $]-\infty; -2]$ und in $[0; \infty[$ und rechtsgekrümmt in $[-2: 0]$.

   $f(-2) = \frac{1}{3}(1)^2\,(4 + 4 + 3) = 3\frac{2}{3} \Rightarrow WP_1(-2; 3\frac{2}{3})$; $f(0) = 9 \Rightarrow WP_2(0; 9) = TEP(0 \mid 9)$

   g) Graph
   Verlauf: siehe rechts:
   Zusätzlich müssen die gefundenen Punkte eingetragen werden.



2. Wendetangente 1 durch $WP_1(-2; 3\frac{2}{3})$:

   $f'(-2) = \frac{4}{3}(-2)^2 \cdot 1 = 5\frac{1}{3}$

   $y = 5\frac{1}{3}\,x + t$ durch $(-2; 3\frac{2}{3})$:

   $3\frac{2}{3} = 5\frac{1}{3}\,(-2) + t \Leftrightarrow t = 14\frac{1}{3}$

   $\Rightarrow y = 5\frac{1}{3}\,x + 14\frac{1}{3}$

   Wendetangente 2 durch $WP_2(0; 9)$ hat Steigung 0 $\Rightarrow y = 9$

Lösung zur 2. Schulaufgabe aus der Mathematik, Klasse 11c, 20.1.04

Gruppe B

1. a) $\mathbb{D}_{max} = \mathbb{R}$

b) Nullstellen: $f(x) = 0 \Leftrightarrow \frac{1}{3}(x-3)^2\,(x^2+2x+3) = 0$ 1. Fall: $x - 3 = 0 \Leftrightarrow x_1 = 3$

2. Fall: $x^2 + 2x + 3 = 0 \Rightarrow x_{2;3} = \frac{-2\pm\sqrt{4-12}}{2} = \frac{-2\pm\sqrt{-8}}{2} \Rightarrow$ keine Lösung

$\Rightarrow$ keine weiteren Nullstellen

Schnittpunkt mit der y-Achse: $f(0) = \frac{1}{3}\cdot(-3)^2\cdot 3 = 9$ $\Rightarrow S(0\,|\,9)$

c) Symmetrie: $f(-x) = \frac{1}{3}(-x-3)^2\left(x^2-2x+3\right)\begin{cases}\neq f(x)\\ \neq -f(x)\end{cases} \Rightarrow$ keine bekannte Symmetrie

d) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$

e) Monotonie: $f(x) = \frac{1}{3}(x^2-6x+9)\,(x^2+2x+3) = \frac{1}{3}\,(x^4-4x^3+27)$

$\Rightarrow f'(x) = \frac{4}{3}x^3 - 4x^2 = \frac{4}{3}x^2\,(x-3)$ $f'(x) = 0 \Rightarrow x_2 = 0;\ x_3 = 3$

Monotonietabelle	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 3$	$x = 3$	$x > 3$
Vorzeichen von f'	–	0	–	0	+
Steigung von f	fallend	wT	fallend	wT	steigend

Testwerte: $f'(-1) = \frac{4}{3}(-1)^2\cdot(-4) < 0$; $f'(1) = \frac{4}{3}(1)^2\cdot(-2) < 0$; $f'(4) = \frac{4}{3}(4)^2\cdot 1 > 0$

Der Graph ist streng monoton fallend in $]-\infty; 3]$ und streng mon. steigend in $[3; \infty[$.

$f(3) = 0 \Rightarrow TIP(3\,|\,0)$; $f(0) = 9 \Rightarrow TEP(0\,|\,9)$

f) Krümmung: $f''(x) = 4x^2 - 8x = 4x\,(x-2)$ $f''(x) = 0 \Rightarrow x_4 = 2;\ x_5 = 0$

Krümmungstabelle	$x < 0$	$x = 0$	$0 < x < 2$	$x = 2$	$x > 2$
Vorzeichen von f"	+	0	–	0	+
Krümmung von f	links	FP	rechts	FP	links

Testwerte: $f''(-1) = 4\cdot(-1)\cdot(-3) > 0$; $f''(1) = 4\cdot 1\cdot(-1) < 0$; $f''(3) = 4\cdot 3\cdot 1 > 0$;

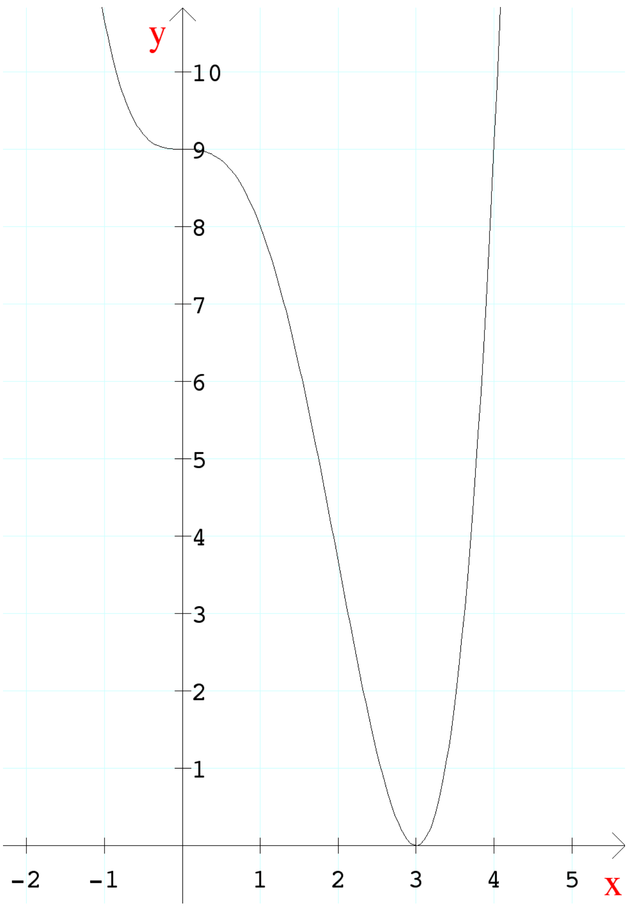
Der Graph ist linksgekrümmt in $]-\infty; 0]$ und in $[2; \infty[$ und rechtsgekrümmt in $[0: 2]$.

$f(2) = \frac{1}{3}(-1)^2\,(4+4+3) = 3\frac{2}{3} \Rightarrow WP_1(2; 3\frac{2}{3})$; $f(0) = 9 \Rightarrow WP_2(0; 9) = TEP(0\,|\,9)$

g) Graph

Verlauf: siehe rechts:

Zusätzlich müssen die gefundenen Punkte eingetragen werden.



2. Wendetangente 1 durch $WP_1(2; 3\frac{2}{3})$:

$f'(2) = \frac{4}{3}(2)^2\cdot(-1) = -5\frac{1}{3}$

$y = -5\frac{1}{3}\,x + t$ durch $(2; 3\frac{2}{3})$:

$3\frac{2}{3} = -5\frac{1}{3}\cdot 2 + t \Leftrightarrow t = 14\frac{1}{3}$

$\Rightarrow y = -5\frac{1}{3}\,x + 14\frac{1}{3}$

Wendetangente 2 durch $WP_2(0; 9)$ hat Steigung 0 $\Rightarrow y = 9$