Lösungen zu den Aufgaben zu den Ableitungsregeln

1. a) $f'(x) = 6x^2 - 8x$ b) $f'(x) = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ c) $f'(x) = 2x - 3$ d) $f'(x) = 1986 \cdot x^{1985}$

2. a) $f'(x) = \frac{-3}{(x-3)^2}$; $f''(x) = \frac{6}{(x-3)^3}$ b) $f'(x) = \frac{2x^2 - 10x + 5}{(2x-5)^2}$; $f''(x) = \frac{30}{(2x-5)^3}$

   c) $f'(x) = \frac{x^2 + 6x + 7}{\left(7 - x^2\right)^2}$; $f''(x) = \frac{2x^3 + 18x^2 + 42x + 42}{\left(7 - x^2\right)^3}$ d) $f'(x) = 1$; $f''(x) = 0$

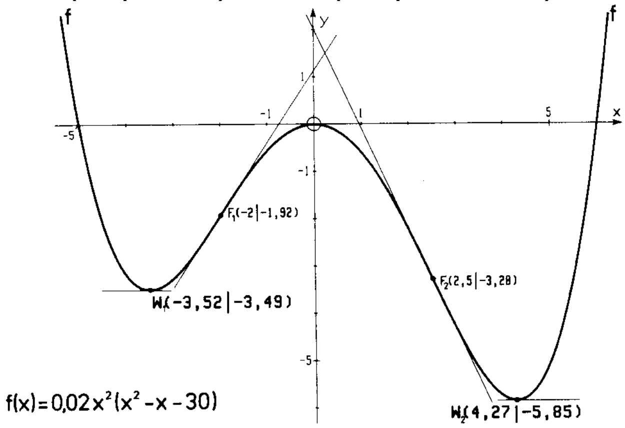
3. a) $\frac{3}{2}\sqrt{x}$ b) Regel bereits bekannt c) $g'(x) = \frac{5}{2}x\sqrt{x}$; $h'(x) = -\frac{\sqrt{x}}{2x^2}$

4. $(uvw)' = ([uv]w)' = (uv)'w + (uv)w' = (u'v + uv')w + (uv)w' = u'vw + uv'w + uvw'$

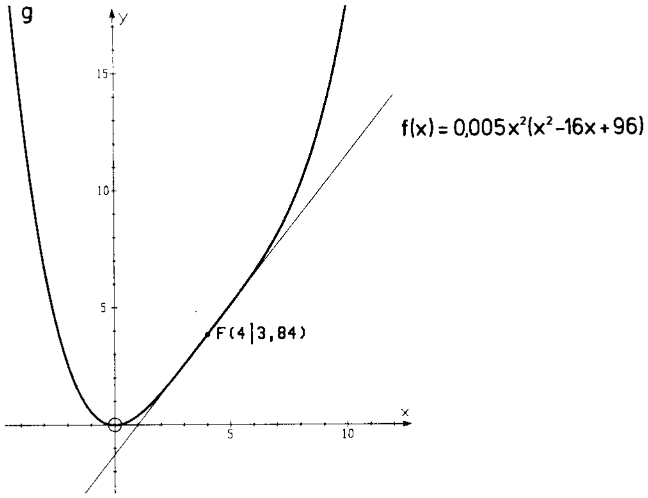
   $$\left(u_1u_2u_3\cdots u_n\right)' = \sum_{i=1}^{n}\left[\left(u_1u_2u_3\cdots u_n\right)\cdot\frac{u_i'}{u_i}\right]$$

5. $f'(x) = 2x \cdot g(x) + x^2 \cdot g'(x) = x\,[\,2 \cdot g(x) + x \cdot g'(x)\,]$ $\Rightarrow$ $f'(0) = 0$

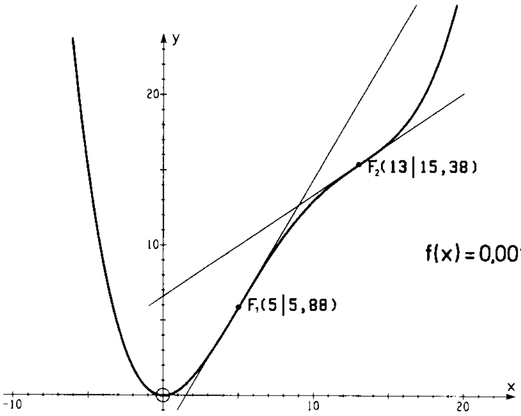
6. a) NS: $x_1 = -5$ (einfach), $x_2 = 0$ (doppelt) , $x_3 = 6$ (einfach); y-Achse: $S(0 \mid 0)$
   keine bekannte Symmetrie; $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$
   $f'(x) = 0{,}02x\,(4x^2 - 3x - 60)$; $f''(x) = 0{,}12\,(2x^2 - x - 10)$
   $TIP\left(\frac{3-\sqrt{969}}{8} \,\middle|\, \frac{-119547+969\sqrt{969}}{25600}\right)$; $HOP(0 \mid 0)$; $TIP\left(\frac{3+\sqrt{969}}{8} \,\middle|\, \frac{-119547-969\sqrt{969}}{25600}\right)$
   $WP_1(-2 \mid -1{,}92)$; $WP_2(2{,}5 \mid -3{,}28125)$



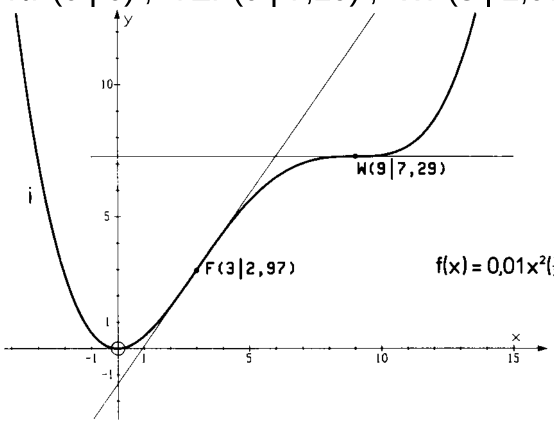
   b) NS: $x_1 = 0$ (doppelt) ; y-Achse: $S(0 \mid 0)$
   keine bekannte Symmetrie; $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$
   $f'(x) = 0{,}02x\,(x^2 - 12x + 48)$; $f''(x) = 0{,}06\,(x^2 - 8x + 16)$
   $TIP(0 \mid 0)$; $FP(4 \mid -3{,}28125)$ (ist kein WP)



c) NS: $x_1 = 0$ (doppelt) ; y-Achse: S(0 | 0)
keine bekannte Symmetrie; $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$
$f'(x) = 0{,}004x\,(x^2 - 27x + 195)$; $f''(x) = 0{,}012\,(x^2 - 18x + 65)$
TIP(0 | 0) ; WP_1(5 | 5,875) ; WP_2(13 | 15,379)

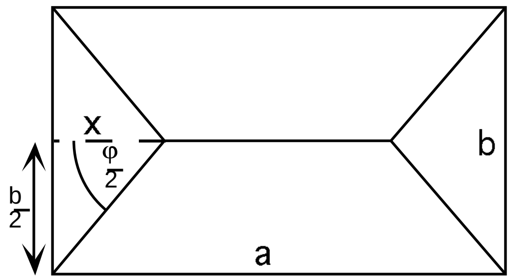


d) NS: $x_1 = 0$ (doppelt) ; y-Achse: S(0 | 0)
keine bekannte Symmetrie; $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = \infty$
$f'(x) = 0{,}04x\,(\frac{1}{3}x^2 - 6x + 27)$; $f''(x) = 0{,}04\,(x^2 - 12x + 27)$
TIP(0 | 0) ; TEP(9 | 7,29) ; WP(3 | 2,97)



7. $s(x) = x + \frac{1}{x}$; $s'(x) = 1 - \frac{1}{x^2}$; $s''(x) = \frac{2}{x^3}$.
$s'(x) = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = 1$; $s''(1) = 2 > 0 \;\Rightarrow\;$ Minimum für $x_1 = 1$

8. a) $\ell(x) = 4\cdot\sqrt{x^2 + \frac{b^2}{4}} + a - 2x$, wobei $x \in \left[0; \frac{a}{2}\right]$



$$\ell'(x) = \frac{4x}{\sqrt{x^2 + \frac{b^2}{4}}} - 2 \;;\quad \ell''(x) = \frac{-4x^2 + b^2}{\left(\sqrt{x^2 + \frac{b^2}{4}}\right)^3}$$

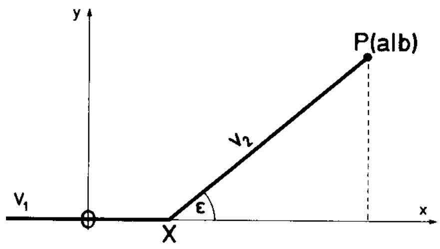
$\ell'(x) = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = \frac{b\sqrt{3}}{6}$; Minimum da $\ell''(x_1) = \frac{b\sqrt{3}}{3} > 0$

Die Länge der Leitungen für $x_1 = \frac{b\sqrt{3}}{6}$ beträgt $b\sqrt{3} + a$. $\varphi = 120°$ $\left(\tan\frac{\varphi}{2} = \frac{\frac{b}{2}}{x_1}\right)$

b) Umfang: $U = 2a + 2b > b\sqrt{3} + a$ Diagonale: $d = \sqrt{a^2 + b^2}$
Annahme: $2d = 2\sqrt{a^2 + b^2} < b\sqrt{3} + a \;\Rightarrow\; 4a^2 + 4b^2 < a^2 + 2\sqrt{3}ab + 3b^2$
$\Leftrightarrow\; 3a^2 - 2\sqrt{3}ab + b^2 < 0 \;\Leftrightarrow\; \left(\sqrt{3}a - b\right)^2 < 0$ Widerspruch $\Rightarrow\; 2\sqrt{a^2 + b^2} \geq b\sqrt{3} + a$

c) $a = 2 \cdot x_1 = 2 \cdot \frac{b\sqrt{3}}{6} = \frac{b}{\sqrt{3}}$; Seitenverhältnis: $a : b = 1 : \sqrt{3}$

9. Zeit für den Weg vom Ursprung O zum Abzweigepunkt X zum Punkt P(a | b):



$$t(x) = \frac{x}{v_1} + \frac{\sqrt{(a-x)^2 + b^2}}{v_2} \quad \text{mit} \quad x \in [0; a].$$

$$t'(x) = \frac{1}{v_1} + \frac{x-a}{v_2\sqrt{(a-x)^2 + b^2}}$$

$t'(x) = 0 \;\Rightarrow\; x_1 = a - \frac{bv_2}{\sqrt{v_1^2 - v_2^2}}$ mit $v_1 > v_2$. Monotonietabelle $\Rightarrow$ TIP bei x_1.

$\Rightarrow$ Kürzeste Zeit für dieses x_1. $\tan\varepsilon = \frac{b}{a - x_1} = \frac{\sqrt{v_1^2 - v_2^2}}{v_2} \;\Rightarrow\; \varepsilon = \arctan\frac{\sqrt{v_1^2 - v_2^2}}{v_2}$

Beispiele: $v_1 = 2v_2 \;\Rightarrow\; \varepsilon = 60°$; $v_1 = 1{,}05 v_2 \;\Rightarrow\; \varepsilon \approx 5{,}85°$

10. a) $f'(x) = 3\left(3x^2 - 7x + 5\right)^2 (6x - 7)$ b) $f'(x) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 4}}$

c) $f'(x) = -8x\left(6 - x^2\right)^3 - 20(4x + 5)^4$ d) $f'(x) = 4\left(3x - 5x^2\right)^3 (3 - 10x) - \frac{9}{2}\sqrt{3x + 4}$

11. a) $f'(x) = 6(2x - 5)^2\sqrt{5x - 3} + \frac{5(2x - 5)^3}{2\sqrt{5x - 3}} = \frac{(2x - 5)^2(70x - 61)}{2\sqrt{5x - 3}}$

b) $f'(x) = \frac{2x^3 - 19x^2 + 12x}{2(2x + 3)^4\sqrt{1 - x}}$

12. a) $f'(x) = \frac{-1}{2\sqrt{1980 - x}}$ b) $f'(x) = 4(2x - 4)\left(x^2 - 4x - 1\right)^3$

c) $f'(x) = \frac{3}{(1 - x)^4}$ d) $f'(x) = 3\sqrt{2x - 5}$

13. a) $f'(x) = \frac{1 - 2x^2}{\sqrt{1 - x^2}}$ b) $f'(x) = 3\left(3x^2 - 3x + 2\right)^3 (2 - x)^2\left(-11x^2 + 23x - 10\right)$

c) $f'(x) = \frac{-x}{\sqrt{\left(x^2 + 1\right)^3}}$ d) $f'(x) = \frac{(6x - 19)(3x - 2)^2}{(2x - 3)^3}$

e) $f'(x) = \frac{1}{(x + 1)\sqrt{x + 1}\sqrt{x - 1}}$ f) $f'(x) = \frac{x - 3}{2(x - 1)\sqrt{x - 1}}$

14. a) $f(x) = 4x^2 - 12x + 9$; $f'(x) = 8x - 12$ b) $f'(x) = 2 \cdot (2x - 3) + (2x - 3) \cdot 2 = 8x - 12$
c) $f'(x) = 2 \cdot (2x - 3) \cdot 2 = 8x - 12$

15. $f'(x) = \frac{-1}{x^2}$;

$$\left[\frac{n(x)}{z(x)}\right]' = \left[n(x) \cdot \frac{1}{z(x)}\right]' = n'(x) \cdot \frac{1}{z(x)} + n(x) \cdot \left[\frac{1}{z(x)}\right]' = n'(x) \cdot \frac{1}{z(x)} + n(x) \cdot \frac{-1}{[z(x)]^2} \cdot z'(x) = \frac{n'(x) \cdot z(x) - n(x) \cdot z'(x)}{[z(x)]^2}$$

<u>*Lösungen zu den Aufgaben zu den Ableitungsregeln, Seite 4*</u>

16. NS: $x_1 = -4$ (dreifach) , $x_2 = 1$ (einfach) , $x_3 = 2\frac{2}{3}$ (einfach) ; y-Achse: $S(0 \mid 2\frac{2}{15})$

keine bekannte Symmetrie; $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = \infty$; $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

$f'(x) = \frac{1}{48}(x+4)^2\left(3x^2-4x-4\right)$; $f''(x) = \frac{1}{4}(x+4)\left(x^2+x-2\right)$

$HOP\left(-\frac{2}{3} \middle| 2\frac{139}{243}\right)$; $TIP\left(2 \middle| -1\frac{4}{5}\right)$; $TEP(-4 \mid 0)$; $WP_1\left(-2 \middle| 1\frac{1}{3}\right)$; $WP_2(1 \mid 0)$

17. $f(x) = (x-a)^k \cdot g(x)$; $g(a) \neq 0$ $\Rightarrow$

$f'(x) = (x-a)^{k-1} \cdot [\, k \cdot g(x) + (x-a) \cdot g'(x) \,]$

$f''(x) = (x-a)^{k-2} \cdot [\, (k-1) \cdot k \cdot g(x) + 2k \cdot (x-a) \cdot g'(x) + (x-a)^2 \cdot g''(x) \,]$

$\quad = (x-a)^{k-2} \cdot [\, (k-1) \cdot k \cdot g(x) + (x-a) \cdot h_2(x) \,]$

$h_2(x)$ ist eine Funktion, die aus $g'(x)$ und $g''(x)$ zusammengesetzt ist

$f'''(x) = (x-a)^{k-3} \cdot [\, (k-2) \cdot (k-1) \cdot k \cdot g(x) + (x-a) \cdot h_3(x) \,]$

$h_3(x)$ ist eine Funktion, die aus $g'(x)$, $g''(x)$ und $g'''(x)$ zusammengesetzt ist

. . .

$f^{(k-1)}(x) = (x-a) \cdot [\, k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot g(x) + (x-a) \cdot h_{k-1}(x) \,]$

$h_{k-1}(x)$ ist eine Funktion, die aus $g'(x))$ $g''(x)$, ... , $g^{(k-1)}(x)$ zusammengesetzt ist

$f^{(k)}(x) = k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 \cdot g(x) + (x-a) \cdot h_k(x)$

$h_k(x)$ ist eine Funktion, die aus $g'(x))$ $g''(x)$, ... , $g^{(k)}(x)$ zusammengesetzt ist

$\Rightarrow$ $f(a) = f'(a) = f''(a) = \ldots = f(k-1)(a) = 0$

$f^{(k)}(a) = k \cdot (k-1) \cdot (k-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1 \cdot g(a) \neq 0$

18. Für die Laufzeit t des Lichtstrahles gilt: $t(x) = \dfrac{\sqrt{x^2+a^2}}{c_1} + \dfrac{\sqrt{(e-x)^2+b^2}}{c_2}$; $x \in [0;e]$

$t'(x) = \dfrac{x}{c_1\sqrt{x^2+a^2}} + \dfrac{x-e}{c_2\sqrt{(e-x)^2+b^2}}$ Für den „schnellsten" Lichtweg gilt: $t'(x) = 0$.

$\Rightarrow$ $x \cdot c_2\sqrt{(e-x)^2+b^2} = c_1(e-x)\sqrt{x^2+a^2}$ I weiterhin gilt:

$\sin\alpha = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+a^2}}$ II und

$\sin\beta = \dfrac{e-x}{\sqrt{(e-x)^2+b^2}}$ III

Aus I, II und III folgt schließlich das Brechungsgesetz: $\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} = \dfrac{c_1}{c_2}$