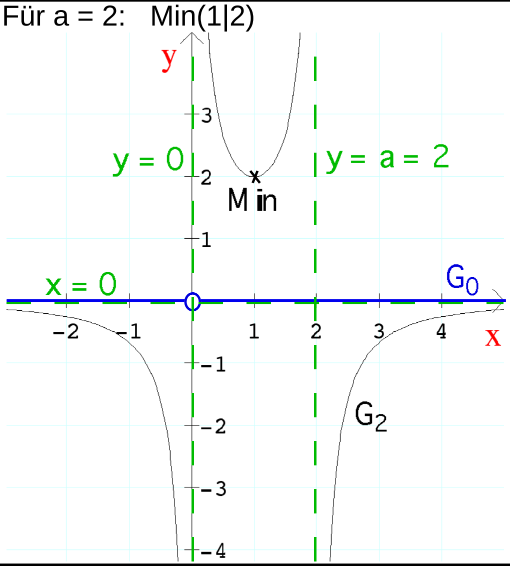
Analysis 1, Vorschlag 1, Abi 2000

erwartete Lösung	Erläuterungen	Rohpunkte I	Rohpunkte II	Rohpunkte III
1.a) Für $a = 0$: $\mathbb{D}_a = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ Für $a > 0$: $\mathbb{D}_a = \mathbb{R} \setminus \{0; a\}$ Für alle Funktionen der Schar gibt es keinen Schnittpunkt mit der y-Achse. Für a=0 reduz.sich d. Funkt.term auf $f_0(x)=0$. $\Rightarrow$ alle Punkte der x-Achse außer (0|0) sind Schnittpunkte mit dem Graphen. Für $a > 0$: $\frac{1}{x} - \frac{1}{x-a} = 0 \iff x = x - a$ keine Lsg $\Rightarrow$ keine Schnittp. mit d. x-Achse	Die Aufgabenstellung ist einfach und geübt. Nur die Fallunterscheidung verlangt etwas Überblick und wird vermutlich von ein paar Schülern übersehen.	1 1 1 1	1 1	
1.b) $y = 0$, d.h. die x-Achse, ist waagerechte Asymptote für $\|x\| \to \infty$ Für $a = 0$ gibt es keine weiteren Asymptoten, da die Definitionslücke behebbar ist. Für $a > 0$ sind die Definitionslücken Polstellen, d.h. es gibt zwei senkrechte Asymptoten: $x = 0$ und $x = a$.	Erläuterung: wie in 1.a)	1 1	1	
1.c) <u>Für a = 0</u> ist die Funktion in $\mathbb{D}_0$ monoton steigend und fallend. Es gibt keine Extrema. Für <u>a > 0</u>: $f_a'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{(x-a)^2} = \frac{2ax-a^2}{x^2(x-a)^2}$ $f_a'(x) = 0 \Rightarrow a(2x-a) = 0 \iff x = \frac{a}{2}$ Testwert (z.B.): $f_a'(-1) = \frac{-2a-a^2}{1\cdot(-1-a)^2} < 0$ Die Polstellen von $f_a'(x)$ sind 2. Ordnung (kein VZW), die Nullstelle ist 1. Ordnung (VZW). Monotonietabelle: || x<0 | 0<x<a/2 | a/2<x<a | x>a Vorz.f'_a || – | – | + | + Monot. || fal. | fallend | steigend | st. Aus der Tabelle folgt: Min. bei $x = \frac{a}{2}$. $f_a\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{1}{\frac{a}{2}} - \frac{1}{\frac{a}{2}-a} = \frac{2}{a} + \frac{2}{a} = \frac{4}{a} \Rightarrow \text{Min}\left(\frac{a}{2} \mid \frac{4}{a}\right)$ $a = 0$: $W_a = \{0\}$ $a > 0$: die x-Achse ist Asymptote, es gibt keine Schnittpkt. mit der x-Achse, bei x=0 und x=a gibt es Polstellen $\Rightarrow$ außerhalb der Polstellen ist $y \in \mathbb{R}^-$. Zwischen den Polstellen liegt ein Min. $\Rightarrow W_a = \mathbb{R} \setminus \left[0; \frac{4}{a}\right[$	Die Aufgabenstellung ist standard und in Teilen einfach. Folgende Aspekte sind problematisch für die Schüler: 1. Eine Monotonie, die nicht streng monoton ist. 2. Das Rechnen mit dem Parameter, vor allem im Umgang mit Bruchtermen. 3. Das finden eines x-Wertes für einen Testwert, wenn die Nullstelle vom Parameter abhängt. 4. Die Folgerung des Wertebereichs aus den vorherigen Ergebnissen.	1 1 3 1	1 2 1 2	1
1.d) Für $a = 2$: Min(1|2)  	Der Graph für $a = 0$ ist einfach. Der andere Graph verlangt guten Überblick.	1	4	
2. Für das Minimum gilt: $x = \frac{a}{2} \Rightarrow a = 2 \cdot x$ $y = \frac{4}{a} \Rightarrow y = \frac{4}{2x} = \frac{2}{x}$	Einfach und geübt.	3		