Grundkurs Mathematik

(2003)

Abiturvorbereitung I:

Aufgabe I:

Zu Werbezwecken werden in einem Betrieb Einweg-Kugelschreiber hergestellt und in Schachteln zu je zwölf Stück abgepackt. Die Kugelschreiber werden nur nach defekt oder intakt unterschieden.

1. In einer Schachtel befinden sich zwei defekte Kugelschreiber.

1.1. Friederike legt die zwölf Kugelschreiber einer Packung nebeneinander.

1.1.1. Wie viele unterschiedliche Anordnungsmöglichkeiten gibt es?

1.1.2. Bei wie vielen Anordnungen liegen die defekten Kugelschreiber nicht unmittelbar nebeneinander?

1.2. Ute entnimmt der Schachtel rein zufällig nacheinander vier Kugelschreiber. Mit welcher Wahrscheinlichkeit

1.2.1. hat sie die beiden defekten Kugelschreiber dabei?

1.2.2. ist der vierte entnommene Kugelschreiber der zweite defekte?

2. Aus langjähriger Erfahrung weiß man, dass 5 % der Kugelschreiber defekt sind.

2.1. Mit welcher Wahrscheinlichkeit findet man in einer Schachtel mit zwölf Kugelschreibern keinen defekten?

2.2. Mit welcher Wahrscheinlichkeit befinden sich unter fünf Schachteln höchstens eine, die keine defekten Kugelschreiber enthält?

2.3. Mit welcher Wahrscheinlichkeit findet man unter 100 Kugelschreibern mehr als drei, aber weniger als achte defekte Kugelschreiber?

3. Ein Bezieher von Kugelschreibern behauptet, dass die Fehlerwahrscheinlichkeit von 5 % nicht mehr stammt. Vom Herstellerbetrieb wird vorgeschlagen, der laufenden Produktion 200 Kugelschreiber zu entnehmen und diese zu überprüfen.

3.1. Man bleibt bei 5 % Ausschuss, wenn sich höchstens 14 defekte Kugelschreiber finden. Mit welcher Wahrscheinlichkeit trifft man bei dieser Entscheidungsregel eine Fehlentscheidung, obwohl der Ausschuss bei 5 % geblieben ist?

3.2. Mit welcher Wahrscheinlichkeit erkennt man mit der Entscheidungsregel aus 3.1 einen Anstieg auf 10 % Ausschuss nicht?

3.3. Wie müsste die Entscheidungsregel aus 3.1 abgeändert werden, wenn man die Ausschusswahrscheinlichkeit 5 % höchstens mit einer Wahrscheinlichkeit von 1 % irrtümlich ablehnen will?

Aufgabe II:

Gegeben sind die Ebene E: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ mit $\lambda \in \mathrm{IR}$ und $\mu \in \mathrm{IR}$ sowie die Gerade g durch den Punkt $A(7 \mid -13 \mid -4)$ mit dem Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ -5 \end{pmatrix}$ und der Punkt $P(13 \mid -9 \mid 0)$.

1.1. Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E in Normalenform! (Mögliches Ergebnis: $E: 2 \cdot x_1 - 2 \cdot x_2 - x_3 + 10 = 0$) 5

1.2. Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S der Geraden g und der Ebene E! (Ergebnis: $S(1 \mid 3 \mid 6)$) 4

1.3. Berechnen Sie die Entfernung der Punkte A und S sowie den Abstand der Punktes A von der Ebene E.
Bestimmen Sie damit den Winkel φ (auf ganze Grad gerundet), den die Gerade g mit der Ebene E bildet.
Erläutern Sie Ihr Vorgehen anhand einer Skizze. 10

2.1. Zeigen Sie, dass $F(-5 \mid -1 \mid 2)$ der Fußpunkt des Lots vom Punkt A auf die Ebene E ist. 5

2.2. Zeigen Sie, dass die Gerade g die Strecke $[FP]$ in einem Punkt T trifft, und berechnen Sie die Koordinaten von T.
(Teilergebnis: $T(4 - 5 \mid 1)$) 9

2.3. Weisen Sie nach, dass der Punkt T der Mittelpunkt der Strecke $[AS]$ und zugleich der Strecke $[FP]$ ist.
Tragen Sie die Punkte T und P in die Skizze von Teilaufgabe 1.3 ein.
Was folgt nun insgesamt für das Dreieck FAPS? Begründung! 7

Aufgabe III:

Gegeben ist die Funktion $f(x) = x \cdot e^{1-x}$ mit $D_f = \mathbb{R}$; ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

1.1. Zeigen Sie, dass $O(0 \mid 0)$ der einzige Achsenschnittpunkt von G_f ist.
Bestimmen Sie das Verhalten von f für $x \to -\infty$ und für $x \to +\infty$. 5

1.2. Zeigen Sie, dass für die 1. Ableitung von f gilt: $f'(x) = (1-x) \cdot e^{1-x}$.
Geben Sie das Monotonieverhalten von f sowie Art und Lage des Extrempunktes von G_f an. 5

1.3. Untersuchen Sie das Monotonieverhalten von G_f, ermitteln Sie die Lage des Wendepunktes und eine Gleichung der Wendetangente von G_f. Zeigen Sie, dass die Wendetangente durch den Punkt $(4 \mid 0)$ geht. 10

1.4. Berechnen Sie die Funktionswerte (auf Zehntel gerundet) an den Stellen $-1; -\frac{1}{2}; \frac{1}{2}$ und 4.
Zeichnen Sie nun die Wendetangente und G_f im Bereich $[-1;4]$ unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse (Hochformat, Ursprung im oberen Drittel, Längeneinheit 2 cm) 7

2. Für eine Funktion F besteht die Beziehung $F(x) = -e^{1-x} - f(x)$; $D_F = \mathbb{R}$.

2.1. Bestätigen Sie durch Rechnung, dass F eine Stammfunktion von f ist. 4

2.2. Bestimmen Sie für $k \in \mathbb{R}$ eine integralfreie Darstellung von $J(k) = \int_{-1}^{k} f(x)\,dx$.

Zeigen Sie, dass gilt: $\lim\limits_{k \to \infty} J(k) = 0$

Was bedeutet dies für die zwei zwischen G_f und der x-Achse im Bereich $[-1;\infty[$ gelegenen Flächenstücke? 9