S.175/29

7/29

$$f(x) = \begin{cases} 4\cdot\dfrac{x^2-x-12}{x^2-1}\,, & \text{für } 3 \le x\,; \\ 4\cdot\dfrac{-x}{x+1}\,, & \text{für } 0 \le x < 3\,,\ x \neq 1\,; \\ 4\cdot\dfrac{x^2-\cancel{1}\,x}{x^2+1}\,, & \text{für } -2 \le x < 0\,; \\ 4\cdot\dfrac{12+x-x^2}{x^2+1}\,, & \text{für } x < -2\,; \end{cases}$$

$\mathbb{D} = \mathbb{R}\setminus\{1\}$;

keine Symmetrie zum Koordinatensystem ;

Nullstellen: $x_1 = -3$; $x_2 = 0$; $x_3 = 4$;

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = 4\,;\quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = -4\,;\quad \lim_{\substack{x\to 1\\ <}} f(x) = \lim_{\substack{x\to 1\\ >}} f(x) = -2\,;$$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} f(x)\,, & \text{für } x \neq 1\,; \\ -2\,, & \text{für } x = 1\,; \end{cases}$$

$$f'(x) = \begin{cases} 4\cdot\dfrac{x^2+22x-1}{(x^2-1)^2}\,, & \text{für } 3 < x\,; \\ 4\cdot\dfrac{-1}{(x+1)^2}\,, & \text{für } 0 < x < 3\,,\ x \neq 1\,; \\ 4\cdot\dfrac{x^2+2x-1}{(x^2+1)^2}\,, & \text{für } -2 < x < 0\,; \\ 4\cdot\dfrac{1-26x-x^2}{(x^2+1)^2}\,, & \text{für } x < -2\,; \end{cases}$$

$$f''(x) = \begin{cases} 8\cdot\dfrac{-x^3-33x^2-3x-11}{(x^2-1)^3}, & \text{für } 3 < x\,; \\ 4\cdot\dfrac{1}{(x+1)^3}, & \text{für } 0 < x < 3\,,\ x \neq 1\,; \\ 8\cdot\dfrac{-x^3-3x^2+3x+1}{(x^2+1)^3}, & \text{für } -2 < x < 0\,; \\ 8\cdot\dfrac{x^3+39x^2-3x-13}{(x^2+1)^3}, & \text{für } x < -2\,; \end{cases}$$

Tiefpunkt: $x_4 = -13-\sqrt{170} \approx -26{,}04$;

$y_4 = 22-2\sqrt{170} \approx -4{,}08$;

$f''(x_4) \approx 0{,}0002$;

Anmerkung: Die weiteren Nullstellen der Funktionen der 1. Ableitung ($-1\pm\sqrt{120}$, $-0{,}5$, $-1\pm\sqrt{2}$, und $-13+\sqrt{170}$) liegen nicht in der jeweiligen Definitionsmenge.

Weitere Extrempunkte sind die Knickpunkte:

Hochpunkt: $x_5 = -2$; $y_5 = 4{,}8$;

Tiefpunkt: $x_6 = 3$; $y_6 = -3$;

$\lim\limits_{x \underset{<}{\to} -2} f'(x) = 7{,}84$; $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} -2} f'(x) = -0{,}16$;

$\Longrightarrow \alpha_1 = 88{,}2^\circ$;

$\lim\limits_{x \underset{<}{\to} 0} f'(x) = -4$; $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 0} f'(x) = -4$;

$\Longrightarrow$ $f(x)$ ist in $x = 0$ differenzierbar ;

$\lim\limits_{x \underset{<}{\to} 3} f'(x) = -0{,}25$; $\lim\limits_{x \underset{>}{\to} 3} f'(x) = 4{,}75$;

$\Longrightarrow \alpha_2 = 87{,}85^\circ$;

Wendepunkte: $x_7 = -2+\sqrt{3} \approx -0{,}27$;

$y_7 = 3-\sqrt{3} \approx 1{,}27$

$x_8 \approx -39{,}06827$;

$y_8 \approx -4{,}06827$;

Weitere Wendepunkte sind die Knickpunkte.

$\mathbb{W} = [-3;4{,}8]$.

Anmerkungen:

1) Die weiteren Nullstellen der 2. Ableitung 1 und $-2-\sqrt{3}$ liegen nicht in der jeweiligen Definitionsmenge.

2) Der Wendepunkt $(x_8;y_8)$ kann mit den Methoden der Schulmathematik nicht exakt berechnet werden; G_f hat für $x < -2$ genau eine Wendestelle; die beiden weiteren Nullstellen von $z(x) = x^3+39x^2-3x-13$ liegen ungefähr bei $-0{,}54$ und $0{,}61$.