1. Berechne

a) $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} 0{,}5 & -5 \\ 2 & 18 \end{vmatrix}$ **e)** $\begin{vmatrix} 18 & -9 \\ -6 & 3 \end{vmatrix}$

$= -2$ $= 2$ $= -2$ $= 19$ $= 0$

2. Berechne

a) $\begin{vmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} r & r \\ 4r & 2r \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} a+b & a-b \\ a-b & a+b \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \cos\alpha & -\sin\alpha \end{vmatrix}$

$= k^2$ $= -2r^2$ $= 4ab$ $= -(\sin\alpha)^2 - (\cos\alpha)^2 = -1$

3. Für welche Werte von a wird die Determinante null ?

a) $\begin{vmatrix} a & a \\ 1 & a \end{vmatrix}$ **b)** $\begin{vmatrix} a & -a \\ 4 & -2 \end{vmatrix}$ **c)** $\begin{vmatrix} a+1 & a-1 \\ a-1 & a+1 \end{vmatrix}$ **d)** $\begin{vmatrix} \sin a & \cos a \\ -\cos a & \sin a \end{vmatrix}$

a) $D = a^2 - a = a(a-1)$; $D = 0 \Leftrightarrow a = 0$ oder $a = 1$

b) $D = -2a + 4a = 2a$; $D = 0 \Leftrightarrow a = 0$ **c)** $D = 4a$; $D = 0 \Leftrightarrow a = 0$

d) $D = (\sin a)^2 + (\cos a)^2 = 1$ es gibt keine a-Werte

4. Löse mit der Cramer-Regel (falls möglich!)

a) $\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 &= 8 \end{aligned}$

$D = -3$;

$D_1 = -9$, $D_2 = 6$; $x_1 = \dfrac{D_1}{D} = 3$, $x_2 = \dfrac{D_2}{D} = -2$

b) $\begin{aligned} -4x_1 + 2x_2 &= -6 \\ 6x_1 - 3x_2 &= 9 \end{aligned}$

$D = 0$; ∞^1 Lösungen: $\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$

c) $\begin{aligned} x_1 - x_2 &= 0 \\ x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned}$

triviale Lösung: $x_1 = x_2 = 0$;
oder mit Cramer: $D = 2$, $D_1 = D_2 = 0$, also $x_1 = x_2 = 0$

d) $\begin{aligned} 4x_1 - 5x_2 &= 12 \\ -5x_1 + 4x_2 &= 12 \end{aligned}$

$D = -9$
$D_1 = 108 = D_2$; $x_1 = x_2 = -12$

e) $\begin{aligned} -\tfrac{1}{3}x_1 + \tfrac{1}{6}x_2 &= 1 \\ 2x_1 - x_2 &= -6 \end{aligned}$

$D = 0$; ∞^1 Lösungen

f) $\begin{aligned} 6x_1 - 3x_2 &= -9 \\ 2x_1 - x_2 &= -3 \end{aligned}$

$D = 0$; ∞^1 Lösungen

5. Löse mit der Cramer-Regel (Fallunterscheidungen!)

a) $ax_1 + x_2 = 1$
$2ax_1 - x_2 = 8$

$D = -3a,\ D_1 = -9,\ D_2 = 6a$

$a \neq 0$: genau eine Lösung $\left(\frac{3}{a} \mid -2\right)$

$a = 0$: Widerspruch: keine Lösung

b) $x_1 + 2x_2 = a$
$ax_1 - 4x_2 = 0$

$D = -4 - 2a = -2(2+a),\ D_1 = -4a,\ D_2 = -a^2$

$a \neq -2$: genau eine Lösung $\left(\frac{2a}{2+a} \mid \frac{a^2}{2(2+a)}\right)$

$a = -2$: Widerspruch: keine Lösung

c) $x_1 - ax_2 = 0$
$ax_1 + x_2 = 0$

$D = 1 + a^2, D_1 = D_2 = 0$
wegen $D \geq 1$ genau eine Lösung $(0 \mid 0)$

d) $4ax_1 - 5ax_2 = -9$
$ax_1 - ax_2 = 3$

$D = a^2, D_1 = 24a,\ D_2 = 21a$

$a \neq 0$: genau eine Lösung $\left(\frac{24}{a} \mid \frac{21}{a}\right)$

$a = 0$: Widerspruch: keine Lösung

e) $ax_1 + x_2 = b$
$bx_1 + x_2 = a$

$D = a - b, D_1 = b - a,\ D_2 = a^2 - b^2$

$a \neq b$: genau eine Lösung $(-1 \mid a+b)$

$a = b$: ∞^1 Lösungen $(\lambda \mid a(1-\lambda)) = \begin{pmatrix}0\\a\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\-a\end{pmatrix}$

f) $6ax_1 + 3bx_2 = -9$
$2bx_1 - ax_2 = -3$

$D = -2(a^2 + b^2)$
$D_1 = 3(a+b),\quad D_2 = -6(a-b)$

$a \neq 0$ oder $b \neq 0$: genau eine Lösung $\left(-\frac{3(a+b)}{2(a^2+b^2)} \mid \frac{6(a-b)}{2(a^2+b^2)}\right)$

$a = b = 0$: Widerspruch: keine Lösung