10. $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{c} = \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 6 \end{pmatrix}$ $\quad \vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \\ 13 \end{pmatrix}$

a) Zeige: $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ und $\vec{a}, \vec{b}, \vec{v}$ sind komplanar.

b) Zeige: Mit $\vec{a}$ und $\vec{b}$ läßt sich nur die triviale Nullsumme bilden. Gib je eine nichttriviale Nullsumme der Vektoren $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ beziehungsweise $\vec{a}, \vec{b}, \vec{v}$ an.

c) Schreibe $\vec{v}$ auf zwei Arten als Linearkombination von $\vec{a}$, $\vec{b}$ und $\vec{c}$.

a) $\mathrm{Det}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) = \mathrm{Det}(\vec{a}, \vec{b}, \vec{v}) = 0$

b) $\vec{a}$ und $\vec{b}$ sind nicht kollinear, also gehts nur so: $0\vec{a} + 0\vec{b} = \vec{0}$

c) Der Ansatz: $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c} = \vec{0}$ führt zum homogenen System

$$\begin{aligned} 2x - 3y - 4z &= 0 \\ -x \quad\quad - z &= 0 \\ 4x + y + 6z &= 0 \end{aligned}$$

die Lösung $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ liefert für t=1: $\vec{a} + 2\vec{b} - \vec{c} = \vec{0}$

Ansatz: $x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{v} = \vec{0}$

die Lösung $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ liefert für t=1: $3\vec{a} + \vec{b} - \vec{v} = \vec{0}$

d) Wegen **a)** sind $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $\vec{v}$ komplanar

Ansatz: $\vec{v} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$, Lösung $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-t \\ 1-2t \\ t \end{pmatrix}$

Beispiel $t = 1$: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\qquad \vec{v} = 2\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$

Beispiel $t = -1$: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\qquad \vec{v} = 4\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{c}$

13. $\vec{a}$ und $\vec{b}$ seien linear unabhängig.
Untersuche $\vec{u}$ und $\vec{v}$ auf lineare Abhängigkeit:

a) $\vec{u} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{v} = \vec{a} - \vec{b}$ $\qquad$ **b)** $\vec{u} = 2\vec{a} - \vec{b}$, $\vec{v} = \vec{b} - 2\vec{a}$

c) $\vec{u} = 2\vec{a} + 6\vec{b}$, $\vec{v} = -\vec{a} - 3\vec{b}$ $\qquad$ **d)** $\vec{u} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}$, $\vec{v} = \gamma\vec{a} + \delta\vec{b}$

Annahme: $\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind linear abhängig, Ansatz: $r\vec{u} + s\vec{v} = \vec{0}$

a) $r(\vec{a} + \vec{b}) + s(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{0} \qquad (r + s)\vec{a} + (r - s)\vec{b} = \vec{0}$

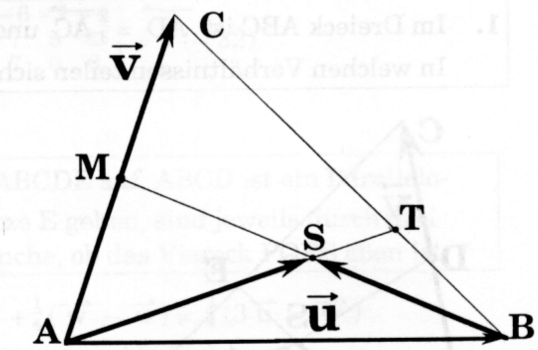
weil $\vec{a}$ und $\vec{b}$ linear unabhängig sind, gilt:

$r + s = 0$

$r - s = 0 \qquad \Rightarrow r = s = 0$, das heißt, $\vec{u}$ und $\vec{v}$ sind linear unabhängig.

S.117/3

3. Im Dreieck ABC ist M die Mitte von [AC]. T teilt [BC] im Verhältnis 1 : 2 von B aus. AT schneidet BM in S.



a) In welchem Verhältnis teilt S die Strecke [AT] von A aus?

b) Nun sei A(0 | 0 | 0), B(2 | 2 | – 4) und C(8 | – 4 | –16). Berechne S.

$\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ $\quad \vec{v} = \overrightarrow{AC}$

a) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BS} - \overrightarrow{AS} = \vec{o}$ $\quad \overrightarrow{BS} = b\,\overrightarrow{BM} = b(-\vec{u} + \frac{1}{2}\vec{v})$

$\overrightarrow{AS} = a\,\overrightarrow{AT} = a(\vec{u} + \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}) = a(\vec{u} + \frac{1}{3}(-\vec{u} + \vec{v})) = a(\frac{2}{3}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v})$

$\vec{u}(6 - 6b - 4a) + \vec{v}(3b - 2a) = \vec{o}$ $\quad a = \frac{3}{4}$ $\quad \overline{AS} : \overline{ST} = 3 : 1$

b) $\vec{S} = \vec{A} + \overrightarrow{AS} = \frac{3}{4}(\frac{2}{3}\vec{u} + \frac{1}{3}\vec{v}) = \frac{1}{2}\vec{u} + \frac{1}{4}\vec{v} = \frac{1}{2}\vec{B} + \frac{1}{4}\vec{C}$ $\quad$ S(3 | 0 | – 6)