S.111/2; 3

Ansatz: $\vec{d} = x\vec{a} + y\vec{b} + z\vec{c}$

Das 3,3-System
$$\begin{aligned} 0 &= 2x + y - z \\ -1 &= -x + 3y + 2z \\ 13 &= 3x + z \end{aligned}$$
ergibt: $x = 3,\ y = -2,\ z = 4$

Ergebnis $\vec{d} = 3\vec{a} - 2\vec{b} + 4\vec{c}$

b) $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix}-1\\1\\1\end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix}2\\-12\\6\end{pmatrix}$ $\vec{d} = -5\vec{a} - 3\vec{b} + 4\vec{c}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix}3\\-1\\4\end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix}-5\\1\\-2\end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix}2\\-1\\3\end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix}-3\\-1\\10\end{pmatrix}$ $\vec{d} = 4\vec{a} + 3\vec{b} + 0\vec{c}$

d) $\vec{a} = \begin{pmatrix}2\\-3\\1\end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix}-4\\9\\1\end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ Widerspruch! keine Lösung
$\vec{a}, \vec{b}$ und $\vec{c}$ sind komplanar:
$\vec{c} = -3\vec{a} + 2\vec{b}$

e) $\vec{a} = \begin{pmatrix}2\\-1\\4\end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix}-3\\0\\1\end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix}-4\\-1\\6\end{pmatrix}, \vec{d} = \begin{pmatrix}7\\-5\\21\end{pmatrix}$

unendlich viele Lösungen, denn $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ und $\vec{d}$ sind komplanar

zum Beispiel $\vec{d} = 5\vec{a} + \vec{b} = 5\vec{c} - 9\vec{b}$

allgemein $\vec{d} = (5 - z)\vec{a} + (1 - 2z)\vec{b} + z\vec{c}$

3. Untersuche auf Komplanarität:

a) $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\-2\\5\end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix}2\\3\\1\end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix}3\\8\\-3\end{pmatrix}$ **b)** $\vec{a} = \begin{pmatrix}4\\-2\\3\end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix}-7\\0\\2\end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix}3\\5\\-6\end{pmatrix}$

c) $\vec{a} = \begin{pmatrix}4\\-7\\3\end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix}-12\\21\\-9\end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix}8\\-14\\6\end{pmatrix}$ **d)** $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\4\\1\end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix}2\\2\\3\end{pmatrix}$

e) $\vec{a} = \begin{pmatrix}3\\1\\0\end{pmatrix}, \vec{b} = \begin{pmatrix}0\\3\\2\end{pmatrix}, \vec{c} = \begin{pmatrix}2\\1\\2\end{pmatrix}$

Komplanaritäts-Kriterium: Drei Vektoren sind genau dann komplanar, wenn ihre Determinante gleich null ist.

a) $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\-2 & 3 & 8\\5 & 1 & -3\end{vmatrix} = 0$; Komplanarität **b)** $\begin{vmatrix}4 & -7 & 3\\-2 & 0 & 5\\3 & 2 & -6\end{vmatrix} = -73$; keine Komplanarität

c) $\begin{vmatrix}4 & -12 & 8\\-7 & 21 & -14\\3 & -9 & 6\end{vmatrix} = 0$; Komplanarität **d)** $\begin{vmatrix}1 & 0 & 2\\4 & 1 & 2\\1 & 0 & 3\end{vmatrix} = 1$; keine Komplanarität

S.112/7

$$k\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6\\y\\z\end{pmatrix}\Rightarrow\quad 2k=6,\ k=3 \qquad y=2k=6,\ z=-k=-3$$

$$k\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x\\-2\\t\end{pmatrix}\Rightarrow\quad k=-1;\ x=-2,\ t=1 \qquad k\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}u\\v\\0\end{pmatrix}\Rightarrow k=0;\quad u=v=0$$

$$k\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4\\w\\2\end{pmatrix}$$

keine Parallelität möglich:
kein k-Wert erfüllt die 1. und 2. Koordinatengleichung.

S.112/8

a) $\begin{vmatrix}2&1&1\\4&a&3\\-1&-6&5\end{vmatrix}=11a-11=0,\quad\Rightarrow\quad a=1$

b) $\begin{vmatrix}-3&0&b\\1&2&8\\2&-1&1\end{vmatrix}=-5b-30=0,\quad\Rightarrow\quad b=-6$

c) $\begin{vmatrix}1&c&1\\2&1&2\\2&d&4\end{vmatrix}=2-4c=0,\quad\Rightarrow\quad c=\frac{1}{2}$, d ist beliebig

d) $\begin{vmatrix}4&-3&f\\0&e&0\\2&1&-1\end{vmatrix}=4e+2ef=2e(2+f)=0,\quad\Rightarrow\quad e=0,\ f=-2$