1. a) $f_k(x) = \ln\left(\frac{x}{k} + \frac{k}{x}\right) = \ln\frac{x^2+k^2}{kx}$ $\qquad k \in \mathbb{R}^+ \qquad D_k = \mathbb{R}^+$

$$\lim_{x\to 0^+} f_k(x) = \ln\frac{k^2}{0} = \text{"}\ln(+\infty) = +\infty\text{"}$$

$$\lim_{x\to\infty} f_k(x) = \ln \underbrace{\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+k^2}{kx}}_{=+\infty \text{ da Grad Zähler > Grad Nenner}} = \text{"}\ln(+\infty)\text{"} = +\infty$$

b) $f_k'(x) = \frac{kx}{x^2+k^2} \cdot \frac{2x \cdot kx - (x^2+k^2)\cdot k}{(kx)^2} = \frac{2kx^2 - kx^2 - k^3}{(x^2+k^2)kx} = \frac{x^2-k^2}{x(x^2+k^2)}$

$x(x^2 + k^2) > 0$ da $x \in \mathbb{R}^+$

$x^2 - k^2 > 0$ für $x > k$ ($k \in \mathbb{R}^+$!)

$x^2 - k^2 < 0$ für $x < k$ ($k \in \mathbb{R}^+$!)

$G_k \begin{cases} \text{streng. mon. fallend in }]0; k[\\ \text{streng. mon. steigend in }]k; +\infty[\end{cases}$

Min $(k/\ln 2)$

c) $f_1(x) = \ln\frac{x^2+1}{x}$

$G_1 \cap G_k$: $\quad \ln\frac{x^2+1}{x} = \ln\frac{x^2+k^2}{kx}$

$$\frac{x^2+1}{x} = \frac{x^2+k^2}{kx}$$

$$kx^2 + k = x^2 + k^2$$

$$x^2(k-1) = k^2 - k$$

$$x^2 = k$$

$$x = \sqrt{k}$$

$$S\left(\sqrt{k} \;\middle|\; \ln\frac{1+k}{\sqrt{k}}\right)$$

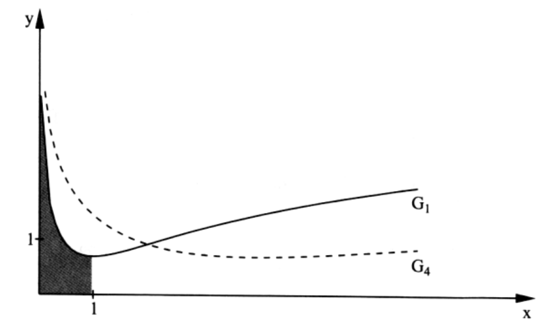
d) $f_1(x) = \ln \frac{x^2+1}{x}$

Min $(1/\ln 2)$

$f_4(x) = \ln \frac{x^2+16}{4x}$

Min $(4/\ln 2)$

$S\left(2 \,\middle|\, \ln\frac{5}{2}\right)$



$f_1\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\frac{5}{2}$ $\quad f_4\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\frac{65}{8}$

$f_1(4) = \ln\frac{17}{4}$ $\quad f_4(1) = \ln\frac{17}{4}$

$f_1(6) = \ln\frac{37}{6}$ $\quad f_4(6) = \ln\frac{52}{24}$

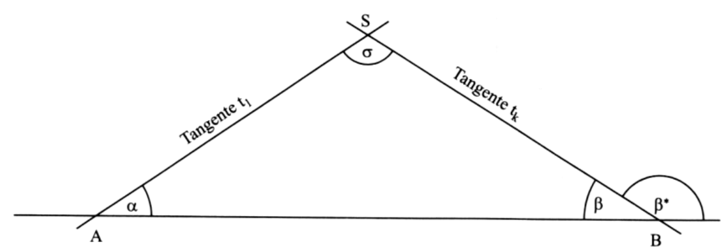
2. a) $f_1'(x) = \frac{x^2-1}{x(x^2+1)}$

$f_1'(\sqrt{k}) = \frac{k-1}{\sqrt{k}(k+1)}$

$f_k'(\sqrt{k}) = \frac{k-k^2}{\sqrt{k}(k+k^2)} = \frac{1-k}{\sqrt{k}(1+k)} = -\frac{k-1}{\sqrt{k}(k+1)}$

$\frac{k-1}{\sqrt{k}(k+1)} - \frac{k-1}{\sqrt{k}(k+1)} = 0$

b) Aus $f_1'(\sqrt{k}) = -f_k'(\sqrt{k})$ folgt $\tan\alpha = -\tan\beta^*$ also $\alpha = 180° - \beta^*$, somit ist das ΔABS_k gleichschenklig mit der Basis [AB]



$\tan\alpha = f_1'(\sqrt{4}) = \frac{3}{2\cdot 5} \Rightarrow \alpha = 16{,}7°$

$\tan\beta^* = f_4'(\sqrt{4}) = -\frac{3}{2\cdot 5} \Rightarrow \beta^* = 163{,}3° \Rightarrow \beta = 16{,}7°$ **oder** $\alpha = \beta$ (siehe oben)

somit $\sigma = 146{,}6°$

a) $J = \lim\limits_{a\to 0}\int_a^1 \ln\frac{x^2+1}{x}\,dx$ (siehe graue Fläche bei 1 d)

$\int \ln x\,dx = -x + x\ln x + c$

also:

$\lim\limits_{a\to 0}\int_a^1 -\ln x\,dx = \lim\limits_{a\to 0}[x - x\ln x]_a^1 = \lim\limits_{a\to 0}[1 - \ln 1 - a + a\ln a] = 1 - 0 - 0 + 0 = 1$

$\lim\limits_{a\to 0}\int_a^1 [\ln(x+1) - \ln x]\,dx = \lim\limits_{a\to 0}[-(x+1) + (x+1)\ln(x+1) + x - x\ln x]_a^1$

$= \lim\limits_{a\to 0}[-2 + 2\ln 2 + 1 - \ln 1 + (a+1) - (a+1)\ln(a+1) - a + a\ln a]$

$= -2 + 2\ln 2 + 1 - 0 + (0+1) - \ln 1 - 0 + 0 = 2\ln 2$

somit $1 \le J \le 2\ln 2$

b) $F(x) = \int_1^x f_1(t)\,dt$

Es muss gelten $F(1) = 0$ (obere Grenze = untere Grenze), somit scheidet Diagramm 2 aus.
Da $f_1(t)$ nur positive Funktionswerte besitzt, muss gelten $F(x) > 0$ für $x > 1$ und $F(x) < 0$ für $0 < x < 1$, somit scheidet Diagramm 5 aus.
Aufgrund des Ergebnisses von Aufgabe 3a ist $\lim\limits_{x\to 0} F(x)$ endlich, somit scheidet Diagramm 1 aus.
Da $f_1(t)$ für $t = 1$ einen Extremwert besitzt, muss $F(x)$ für $x = 1$ einen Wendepunkt haben, somit scheidet Diagramm 4 aus.
Diagramm 3 zeigt den Graphen G_F.