

Abi 2001-I

Gegeben ist die Schar der Funktionen $f_k: x \mapsto \ln\left(\frac{x+k}{k+x}\right)$ mit $k \in \mathbb{R}^+$ und Definitionsmenge $D_k = \mathbb{R}^+$. Der Graph von f_k wird mit G_k bezeichnet.

1. a) Bestimmen Sie das Verhalten von f_k an den Rändern von D_k (2BE)

b) Bestätigen Sie, dass gilt: $f'_k(x) = \frac{x^2 - k^2}{x \cdot (x^2 + k^2)}$

Ermitteln Sie Art und Lage des Extrempunkts von G_k . (6 BE)

c) Berechnen Sie für $k \neq 1$ die Koordinaten des Schnittpunktes $S_k(x_s | y_s)$ von G_1 und G_k in Abhängigkeit von k . [Teilergebnis: $x_s = \sqrt{k}$] (4 BE)

d) Zeichnen Sie die Graphen G_1 und G_4 . Berechnen Sie dazu die Funktionswerte an geeigneten Stellen und berücksichtigen Sie alle bisherigen Ergebnisse. (5 BE)

2. a) Zeigen Sie, dass gilt: $f'_1(x_s) + f'_k(x_s) = 0$ (mit x_s aus Teilaufgabe 1c). (3 BE)

b) Die Tangenten t_1 und t_k an die Graphen G_1 und G_k im Punkt S_k begrenzen zusammen mit der x -Achse ein Dreieck. Begründen Sie, dass dieses Dreieck gleichschenkelig ist. Berechnen Sie für $k = 4$ die Innenwinkel des Dreiecks (auf eine Dezimale gerundet). (6 BE)

3 Für $x \in]0; 1]$ gilt die Ungleichungskette: $-\ln x \leq f_1(x) \leq \ln(x+1) - \ln x$ (Nachweis nicht erforderlich)

~~a) Der Graph G_1 , die Koordinatenachsen und die Gerade mit der Gleichung $x = 1$ begrenzen ein sich ins Unendliche erstreckendes Flächenstück J . Zeigen Sie mit Hilfe obiger Ungleichungskette, dass J einen endlichen Inhalt hat, dessen Wert in $[1; 2\ln 2]$ liegt. (Hinweis: $\lim_{x \rightarrow 0} x \ln x = 0$ kann ohne Nachweis verwendet werden.) (8 BE)~~

b) Gegeben ist die Integralfunktion $F: x \mapsto \int_1^x f_1(t) dt$ mit $x \in \mathbb{R}^+$.

Der Graph von F wird mit G_F bezeichnet. In einem der folgenden Diagramme ist G_F richtig gezeichnet. Geben Sie für jedes der anderen Diagramme einen Grund an, warum es sich nicht um G_F handeln kann. (6 BE) (40 BE)

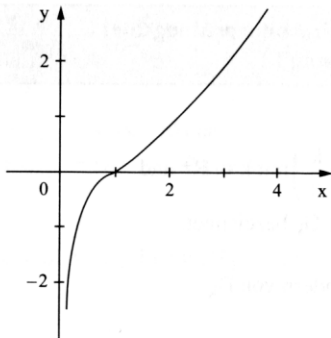


Diagramm 1

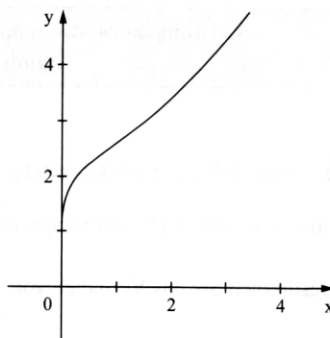


Diagramm 2

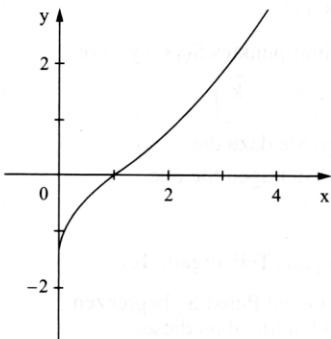


Diagramm 3

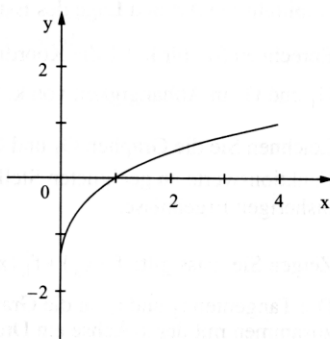


Diagramm 4

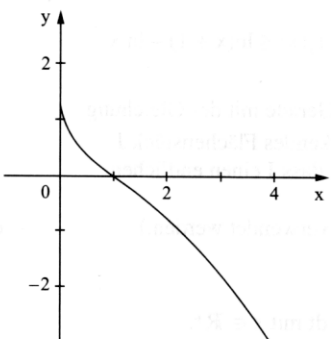


Diagramm 5